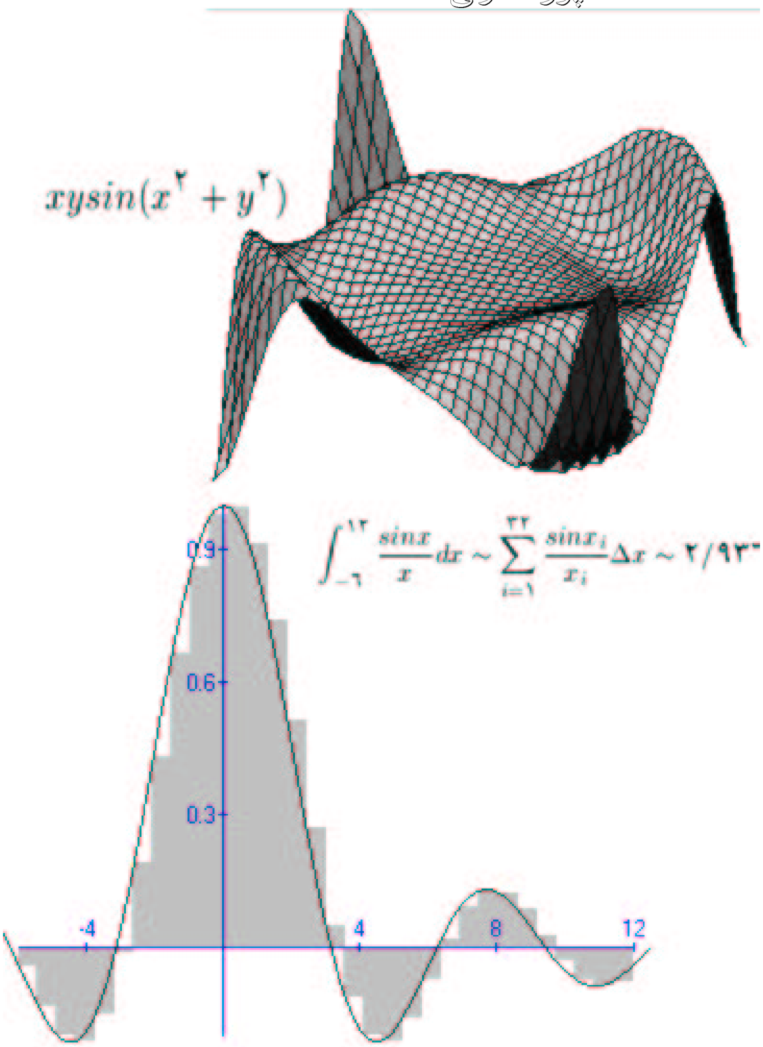
ریاضیات عمومی

(برای رشته‌های غیرریاضی)

شاهپور نصرتی



بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

بنام حق

مقدمه

این مجموعه، مختصری از مطالب دروس ریاضیات دانشگاهی است که تحت عنوان ریاضیات عمومی تدریس می شود. درس ریاضی عمومی، پایه ای برای کلیهٔ ریاضیاتی است که در رشته‌های گوناگون و زیرشاخه‌های آنها ارائه می شود. اهمیت این درس و پایه و پیش نیاز بودن آن، دلیلی واضح برای مطالعهٔ دقیق این درس است و لذا ذکر اصول اولیه و مبادی آن الزامی بوده ولی در عین حال لزومی به بیان تمامی مطالب و ریز قضایای ریاضی نیست و به نظر نگارنده برخی از مطالب را می بایست مختص به رشتهٔ ریاضی دانست و در سایر رشته‌ها نیازی به بیان دقیق مطالب بسیار تکنیکی ریاضی نیست، بنابراین به بیان لب کلام بسنده کرده و خلاصه‌ای از مفاهیم و عبارات مورد نیاز بیان می شود.

در فصول اول و دوم مجموعه ها، محور حقیقی و صفحهٔ مختصات مورد بحث قرار می گیرد تا مبنائی برای فصل سوم و چهارم که توابع هستند، باشند. ذکر این چهار فصل برای کلیهٔ رشته های دانشگاهی الزامی است و تحت عنوان ریاضیات پیش دانشگاهی بیان می گردد.

در فصل پنجم اعداد مختلط را بطور مختصر بیان نمودیم که برای رشته های فنی و مهندسی و زیرشاخه های آن مهم و مفید است.

در فصل ششم دربارهٔ حد و پیوستگی که مفاهیمی پایه در ریاضیات عمومی هستند، صحبت کردیم و این مفهوم تا اندازه ای مبنای مشتق است که در فصل هفتم بیان شده است. مشتق و دیفرانسیل جزء لاینفک ریاضیات عمومی هستند و در این فصل است که دانشجو خود را باید درون ریاضیات احساس کند. اگر مفهوم مشتق بدرستی برای دانشجو بیان نشود، دانشجو در فصل انتگرال دچار مشکل خواهد شد. پس سعی بلیغ در بخش مشتق موجب راحتی در انتگرال ها خواهد بود.

هرچند پس از فصل هشتم — انتگرال ها— دانشجو آماده است تا ریاضیات مختص به رشتهٔ خود را فراگیرد، لیکن برای رشته های مهندسی فصل انتهائی که سری ها است، الزامی بوده و خود بحثی جذاب و مفید خواهد بود.

در مجموع مطالب برای اکثر رشته‌ها قابل استفاده بوده و در این وجیزه سعی شده تا عمدهٔ مطلب بیان شده و حداقل خلاصه‌ای از مفاهیم مورد نیاز تشریح می گردد. مطالب از منبع خاصی نقل نشده و تا حد امکان در هر بخشی، برای انتقال و درک بیشتر مفاهیم و مطالب، از مثالها و تمرینات کلاسی و مطالب ارزنده استفاده شده و در پایان نیز تمرینات منزل برای دانشجو ذکر گردیده است.

به تمرینات خیلی اهمیت می دهیم زیرا ریاضی یعنی تمرین و بدون آن، دانشجو درس را بخوبی یاد نخواهد گرفت. دو نوع تمرین ذکر شده، تمرین کلاسی و تمرین منزل که هر کدام مختص به زمانی مشخص است. استاد می تواند در صورت لزوم تمرینات کلاسی را حل کند، و در این صورت سهم دانشجو تنها تمارین منزل خواهد بود. علاوه بر این علاقمندان می توانند جواب برخی تمرینات را از آدرس زیر دریافت نمایند:

$www.OlumCAMP.com/Math/index.html$

همچنین برای دانشجویان علاقمند در پایان برخی فصول، پروژه‌هائی ارائه شده است که حاوی نکاتی سودمند می باشد.

این وجیزه با نرم افزار «فارسی‌تک» تایپ شده است که نرم افزاری قوی در فرمولسازی ریاضی است. مسلماً نوشتار خالی از اشکالات تکنیکی و متنی نیست و متعاقباً از این مساله پوزش خواسته و خوانندهٔ محترم به بزرگواری خویش ما را می بخشند.

شاهپور نصرتی
زمستان ۸۵
$info@olumcamp.com$

فهرست مندرجات

فصل ۱

مجموعه ها

۱.۱ تعاریف

۱.۱.۱ مجموعه

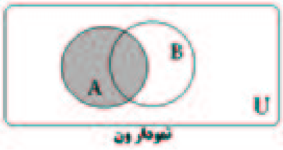
مجموعه از مفاهیم تعریف نشدهٔ ریاضی مانند خط و نقطه در هندسه است و مختصراً منظور از یک مجموعه دسته‌ایٍ از اشیاء هستند که کاملاً مشخص اند و نیز مجموعه گردایه‌ای از اشیاء است. معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ لاتین $A, B, C, \cdots$ نشان داده و هر شیء نسبت به مجموعه دو حالت دارد، یا متعلق به مجموعه است $a \in A$ و یا متعلق به مجموعه نیست $a \notin A$. به هر شیء درون مجموعه عضو یا عنصر مجموعه گوئیم. **عضویت** یک شیء به مجموعه را با $\in$ نشان می دهیم، برای مثال می نویسیم $a \in A$. اشیای درون مجموعه را با حروف کوچک $a, b, c, \cdots$ نشان می دهیم.

مجموعهٔ متناهی $A = \{a, b, c\}$

مجموعهٔ نامتناهی $B = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$

مجموعهٔ کلی مورد بحث را مجموعهٔ مرجع نامیده و با U نشان می دهیم. مجموعهٔ بدون عضو را مجموعهٔ تهی نامیده و با ϕ یا $\{\ \}$ مشخص می کنیم. نمایش مجموعه با علائم ریاضی بصورت $C = \{x|\ P(x)\}$ بوده و می خوانیم «C مجموعه‌ای با اعضاء x است بقسمی که دارای خاصیت $P(x)$ است» یعنی دارای خاصیتی مشخص است. **متغیر** حرف یا علامتی است که جانشین هر عضو مجموعه می شود.

نمایش هندسی یک مجموعه با نمودار را نمودار **ون** یا **اویلر–ون** گوئیم که اولین بار توسط ریاضیدان انگلیسی «ون» ابداع شد.



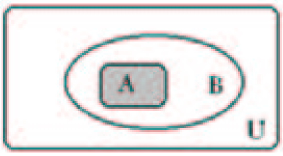
نمودار ون

۲.۱.۱ زیرمجموعهٔ یک مجموعه

گوئیم A زیرمجموعهٔ B است اگر هر عضو A در B نیز باشد و می نویسیم $A \subseteq B$. تعریف ریاضی آن چنین است

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$$

اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد می نویسیم $A \nsubseteq B$.



گزاره های زیر را داریم:

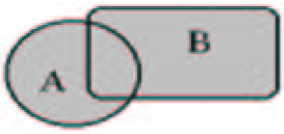
آ) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه داریم $A = B$.

ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه داریم $A \subseteq C$.

پ) برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند C داریم $\phi \subseteq C \subseteq U$.

۲.۱ اعمال روی مجموعه‌ها

۱.۲.۱ اجتماع



اجتماع دو مجموعه را با $A \cup B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش همان اعضاء A است همراه با اعضاء B. به عبارت دیگر

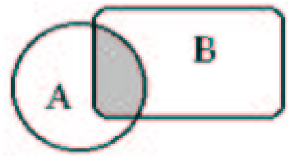
$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$$

برای مثال اگر $A = \{۱, ۳, ٦, ۲۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ٦, ۷\}$ دو مجموعه باشند سپس اجتماع آنها $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ٦, ۷, ۲۸\}$ خواهد بود.

۲.۲.۱ اشتراک

اشتراک دو مجموعه را با $A \cap B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش هم در A هستند و هم در B. یعنی

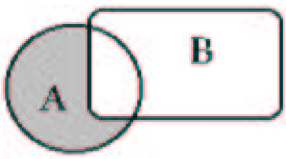
$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \ \text{و} \ x \in B\}$$



۳.۲.۱ تفاضل

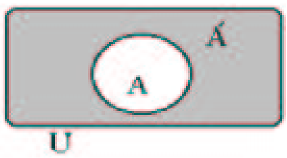
تفاضل دو مجموعه را با $A - B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای از اعضاء A که در B نیستند. به عبارت دیگر

$$A - B = \{x \ : \ x \in A \ \text{و} \ x \notin B\}$$



۴.۲.۱ متمم

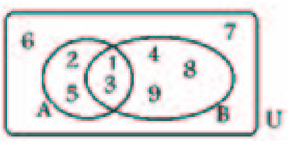
متمم یک مجموعه A را با A' (آ پریم) نشان داده و عبارتست از مجموعهٔ تمام اعضائی از مرجع که در A نیستند، یعنی $A' = U - A$.



مثال ۱.۱ فرض کنید $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ مجموعهٔ مرجع و A و B بصورت زیر باشند.

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۵\} \quad , \quad B = \{۱, ۳, ۴, ۸, ۹\}$$

بررسی کنید که مجموعه های زیر را داشته و نمودار ون نیز آنها را نشان می دهد.



$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹\} \quad , \quad A \cap B = \{۱, ۳\}$$
$$A' = \{۴, ۶, ۷, ۸, ۹\} \quad , \quad B' = \{۲, ۵, ۶, ۷\}$$
$$A - B = \{۲, ۵\} \quad , \quad A \cap B' = \{۲, ۵\}$$

مطلب ۱.۱ برای هر دو مجموعه مانند A و B داریم $A - B = A \cap B'$

مطلب ۲.۱ برای مجموعهٔ دلخواه A داریم:

آ) $A\cap\phi=\phi \quad , \quad A\cup\phi=A$

ب) $A\cap U=A \quad , \quad A\cup U=U$

پ) $A\cap A=A \quad , \quad A\cup A=A$

ت) $A\cap A'=\phi \quad , \quad A\cup A'=U$

ث) $\phi'=U \quad , \quad U'=\phi$

مطلب ۳.۱ قوانین مهم در اعمال بین مجموعه ها چنین هستند:

آ) قوانین جابجائی:

$$A\cup B=B\cup A \quad , \quad A\cap B=B\cap A$$

ب) قوانین شرکتپذیری:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad , \quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

پ) قوانین پخشی:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C) \quad , \quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

ت) قوانین دمورگان:

$$(A\cup B)'=A'\cap B' \quad , \quad (A\cap B)'=A'\cup B'$$

مثال ۲.۱ عبارت $(A-B)\cap B$ را ساده کنید.

حل. مطابق قوانین بالا می نویسیم

$$\begin{aligned}(A-B)\cap B &= (A\cap B')\cap B && \text{طبق مطلب ۱.۲.۱}\\ &= A\cap(B'\cap B) && \text{طبق مطلب ۳.۲.۱(ب)}\\ &= A\cap\phi && \text{طبق مطلب ۲.۲.۱(ت)}\\ &= \phi\end{aligned}$$

مثال ۳.۱ ثابت کنید $A\cup(A\cap B)=A$.

حل. مطابق قوانین مطلب ۲.۱ چنین می نویسیم

$$\begin{aligned}A\cup(A\cap B) &= (A\cap U)\cup(A\cap B) && \text{طبق مطلب ۲.۲.۱(ب)}\\ &= A\cap(U\cup B) && \text{طبق قانون پخشی}\\ &= A\cap U && \text{طبق مطلب ۲.۲.۱(ب)}\\ &= A && \text{طبق مطلب ۲.۲.۱(ب)}\end{aligned}$$

تمرین ۱.۱ کلاسی. عبارت $(A-B)\cap(B-A)$ را ساده کنید.

تمرین ۱.۲ منزل.

۱) فرض کنید $U=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ مجموعهٔ مرجع و A و B بصورت زیر باشند.

$$A=\{۱,۲,۵\} \quad , \quad B=\{۱,۳,۴,۵,۷\}$$

مجموعه های زیر را یافته و با نمودار ون نیز آنها را نشان دهید.

$$B-A \quad , \quad B\cap A' \quad , \quad A' \quad , \quad B' \quad , \quad A\cup B \quad , \quad A\cap B$$

۲) فرض کنید $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی، مجموعهٔ مرجع بوده و $\mathbb{O}=\{۱,۳,۵,\cdots\}$ مجموعهٔ اعداد فرد و $\mathbb{E}=\{۲,۴,۶,\cdots\}$ مجموعهٔ اعداد زوج باشند. مجموعه های زیر را بیابید.

$$(\mathbb{E}\cup\mathbb{N})-\mathbb{O} \quad , \quad (\mathbb{N}-\mathbb{E})\cup\mathbb{E} \quad , \quad (\mathbb{E}\cup\mathbb{O})-\mathbb{N} \quad , \quad (\mathbb{E}\cap\mathbb{O})'\cup\mathbb{E}$$

عبارات زیر را ساده کنید:

۳) $(A-B)'\cup A$

۴) $(A'\cup B')'\cup(B-A)$

۵) $(A-B)'\cap(A\cup B)$

۶) $(A'-B)'\cap B'$

۷) $(A-B)\cup(A'\cap B')$

۸) $(A-B)\cup(A\cap B)$

ثابت کنید:

۹) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

۱۰) $[(A\cup B)-B]\cup(A\cap B)=A$

۱۱) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

۱۲) $A\cap(A\cup B)=A$

۱۳) $A \cup (A \cap B) = A$

۱۴) $(A')' = A$

۱۵) برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A مقدار $A \cup (A \cap (A \cup (A \cap (A \cup (\cdots)))))$ چیست؟

پروژه ۱.۱ (تفاضل متقارن مجموعه ها)
برای دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B **تفاضل متقارن** دو مجموعه چنین تعریف می شود:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

الف) تفاضل متقارن دو مجموعه را با نمودار ون نشان دهید و حاصل مجموعه‌های $A\Delta\phi$ و $A\Delta U$ و $A\Delta A$ را بیابید.

ب) دو مجموعه مثال بزنید که $A\Delta B = A \cap B$

ثابت کنید

پ) $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

ت) $(A\Delta B')\Delta B = A \cap B$

ث) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

ج) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

پروژه ۲.۱ (حاصلضرب مجموعه ها)
برای دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B، **حاصلضرب** دو مجموعه چنین تعریف می شود:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

اعضاء این مجموعه بصورت زوجهای مرتب (x, y) تعریف می شود.

الف) برای دو مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ حاصلضرب $A \times B$ را بدست بیاورید.

ب) اگر A دارای m عضو و B دارای n عضو باشد مجموعهٔ $A \times B$ چند عضو خواهد داشت؟

ج) اگر برای سه مجموعهٔ A و B_1 و B_2 داشته باشیم $B = B_1 \cup B_2$ ثابت کنید:

$$A \times B = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$$

فصل ۲

محور حقیقی و صفحهٔ مختصات

۱.۲ مجموعهٔ اعداد

از آنجا که مهمترین عناصر ریاضی، **اعداد** هستند بنابراین چند مجموعهٔ عددی مهم در اینجا ذکر می کنیم. تمام اعدادی را که ما می شناسیم را عدد حقیقی گفته و با $\mathbb{R}$ نشان می دهیم. همچنین

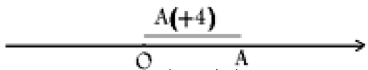
$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \cdots\} \text{ مجموعه اعداد طبیعی}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\} \text{ مجموعه اعداد صحیح}$$

علاوه بر اینها مجموعهٔ تمام اعدادی را که بتوان آنها بصورت کسری با صورت و مخرج صحیح نوشت را اعداد **گویا** نامیده و با $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم. برای مثال $\frac{۳}{۲} \in \mathbb{Q}$ و $\sqrt{۵} \notin \mathbb{Q}$. می توان گفت مجموعهٔ اعداد گویا یعنی مجموعهٔ اعداد اعشاری مختوم مانند ۰/۱۲۵۲۱۵۲ و مکرر نامختوم مانند ۰/۱۹۰۱۹۰۱۹۰۰۰۰. مجموعهٔ اعداد حقیقی که گویا نیستند را گنگ نامیده و با $\mathbb{Q}'$ نشان می دهیم، مثلاً $\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}'$ و $\pi \in \mathbb{Q}'$. بطور کلی $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

۱.۱.۲ محور اعداد حقیقی

محور حقیقی عبارتست از خط راستی که روی آن نقطه ای بعنوان مبدأ O اختیار نموده و یک جهت برای آن در نظر می گیریم. روی محور فاصله ای دلخواه را بعنوان

واحد طول در نظر گرفته و آنرا ۱ می نامیم. بدین ترتیب هر نقطه روی این محور با یک عدد مشخص می شود که به آن طول نقطه گوئیم مثلاً $A(+۴)$ یعنی نقطه A دارای طول $+۴$ است. برای رسم این نقطه روی محور درجهت مثبت ۴ واحد جلوبروید[1].



فواصل اعداد روی محور را **بازه** نامیده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x\leq b\}$ بازهٔ بسته

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a< x\leq b\}$ بازهٔ نیم بسته یا نیم باز

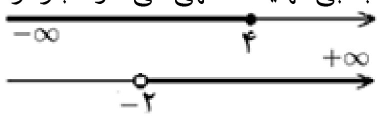
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x< b\}$ بازهٔ نیم بسته یا نیم باز

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a< x< b\}$ بازهٔ باز

تفاوت چهار بازهٔ بالا در نقاط ابتدائی و یا انتهائی آنهاست. در حالتی که بازه، از یک طرف به بی نهایت منتهی می شود، بازه را **باز** می گذاریم مانند

$(-\infty,۴]=\{x\in\mathbb{R}|x\leq ۴\}$

$(-۲,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq -۲\}$



مثال ۱.۲ بازه ها را بایستی بعنوان مجموعه های عددی بررسی نمود.

$$(۱,۳]\subset[۱,۴) \quad , \quad \frac{۴}{۳}\notin[-۲,۱]$$
$$(-\infty,۴]\cap(۲,\infty)=(۲,۴] \quad , \quad (-\infty,۳]\cap(۱,۵)=(۱,۳]$$
$$(۲,۴]-[۳,۵)=(۲,۳) \quad , \quad (-۲,\infty)\cup(-\infty,-۲)=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

مطلب ۱.۲ برخی از روابط بین اعداد دلخواه a و b چنین است:

$$a\times ۰=۰ \quad , \quad a\times ۱=a$$
$$-(a+b)=(-a)+(-b) \quad , \quad (-a)\times(-b)=a\times b$$
$$-(-a)=a \quad , \quad \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{۱}=a \quad , \quad \frac{۰}{a}=۰$$
$$\frac{۰}{a}=۰ \quad , \quad \frac{a}{۰}=\infty$$

[1] برخی کتب آموزشی برای محور دو جهت رسم می کنند، که امری اشتباه است و بایست تنها یک جهت، آنهم برای نشان دادن جهت مثبت برای محور قائل شد.

۲.۱.۲ نامعادلات

عبارت متشکل از یک عدد و یک یا چند متغیر مانند $x, y, z, \cdots$ را **یک جمله ای** گوئیم. عبارتی که از مجموع یا تفاضل چند یک جمله ای تشکیل می شود را عبارت جبری گوئیم. دو عبارت جبری که توسط یکی از علامتهای $\geq$, $\leq$, $<$, $>$ بهم مرتبط باشند یک نامعادله تشکیل می دهند، مانند $5x - 4 \leq 2x + 1$. برای حل نامعادلات از موارد زیر کمک می گیریم:

۱) به دو طرف نامعادله می توان یک مقدار را اضافه یا کم نمود.

۲) در نامعادلات اعداد و متغیرها را میتوان از یکطرف بطرف دیگر منتقل کرد و در این انتقال، علامت عدد یا متغیر عوض می شود.

۳) دو طرف یک نامعادله را می توان در یک عدد ضرب و یا بر عددی تقسیم کرد. اگر عدد منفی باشد جهت نامعادله عوض می شود ولی اگر عدد مثبت باشد جهت نامعادله عوض نخواهد شد.

مثال ۲.۲ نامعادلهٔ زیر را حل کنید $2x - 3 > 3x + 2$

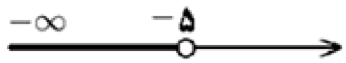
$$2x - 3 > 3x + 2$$

انتقال مجهولات بطرف چپ و اعداد طرف راست $\quad 2x - 3x > +2 + 3$

$$-x > +5$$

با ضرب طرفین در یک منفی جهت عوض می شود $\quad x < -5$

جواب $\quad x \in (-\infty, -5)$



مثال ۳.۲ نامعادلهٔ زیر را حل کنید $(x+1)^2 \geq x^2 - 4x - 5$

$$(x+1)^2 \geq x^2 - 4x - 5$$

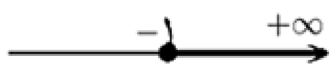
$$x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 4x - 5$$

انتقال مجهولات بطرف چپ و اعداد طرف راست $\quad x^2 + 2x - x^2 + 4x \geq -5 - 1$

طرفین را بر ۶ تقسیم می کنیم $\quad 6x \geq -6$

$$x \geq -1$$

جواب $\quad x \in [-1, +\infty)$



برای حل معادلات نیز از روش مشابهی استفاده می کنیم تنها با این تفاوت که علامت در نامعادله مفهومی ندارد.

تمرین ۱.۲ کلاسی. نامعادلهٔ $(۲x - ۱)(x + ۲) \leq ۲x^۲ - ۵$ را حل کنید.

۳.۱.۲ معادلهٔ درجه دوم

این معادله بصورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ بیان می شود که در آن a, b, c ضرایب ثابتی هستند. هدف ما یافتن عددی است که اگر بجای x قرار گیرد، معادله برابر صفر شود. برای مثال اگر معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ٦ = ۰$ را در نظر بگیرید با جایگذاری $x = ۲$ در معادله برابر صفر می شود. عدد ۲ را ریشه این معادله گوئیم. هر معادلهٔ در جه‌دو حداکثر دارای دو ریشه است. برای یافتن ریشه های معادله درجه دوم ابتدا مقداری با نام **دلتا** $\Delta = b^۲ - ۴ac$ پیدا می کنیم و سپس ریشه‌ها را با مقادیر زیر می یابیم.

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

مثال ۴.۲ ریشه های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۲۰ = ۰$ را به روش دلتا بیابید.

حل. در این معادله داریم $a = ۲ \;\; , \;\; b = -۳ \;\; , \;\; c = -۲۰$ بنابراین

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۳)^۲ - ۴(۲)(-۲۰) = ۹ + ۱٦۰ = ۱٦۹$$

و ریشه‌ها چنین خواهند بود

$$x_۱ = \frac{-(-۳) + \sqrt{۱٦۹}}{۲ \times ۲} = \frac{۳ + ۱۳}{۴} = ۴$$

$$x_۲ = \frac{-(-۳) - \sqrt{۱٦۹}}{۲ \times ۲} = \frac{۳ - ۱۳}{۴} = -۲/۵$$

مطلب ۲.۲ در این روش سه حالت وجود دارد

حالت ۱) اگر $\Delta > ۰$ معادله دقیقا دو ریشه دارد. این دو ریشه همان $x_۱$ و $x_۲$ مذکور در فوق هستند.

حالت ۲) اگر $\Delta = ۰$ معادله دقیقا یک ریشه دارد. این ریشهٔ مضاعف برابر با $x = \frac{-b}{۲a}$ خواهد بود.

حالت ۳) اگر $\Delta < ۰$ معادله دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

تمرین ۲.۲ منزل.

۱) حاصل مجموعه‌های زیر را حساب کنید:

$$(a)\ \ (-\infty,۴]\cap(-\infty,۵)\quad,\quad (b)\ \ (-\infty,-۲]\cup(-۲,\infty)$$
$$(c)\ \ (-۲,\infty)\cup(-\infty,۲)\quad,\quad (d)\ \ \{(-۱,\infty)-(-\infty,۱)\}\cap(۰,۲]$$
$$(e)\ \ (۱,۳)-[۱,۳)\quad,\quad (f)\ \ \{(-\infty,۲/۵)\cap(-۳,\infty)\}'\cap(-۱,۴]$$

۲) معادلات زیر را به روش دلتا حل کنید.

$$(a)\ \ ۲x^۲+۷x-۴=۰\quad,\quad (b)\ \ x^۲-۱۰x+۱۶=۰$$
$$(c)\ \ ۹x^۲-۱=۰\quad,\quad (d)\ \ ۲x^۲+x-۱۰=۰$$

۳) نامعادلات زیر را حل کنید:

$$(a)\ ۲x+۴\geq x+۵\quad,\quad (b)\ (x-۱)(x-۳)\leq(x-۱)(۳x+۵)$$
$$(c)\ (۲x-۱)(x+۲)>۲x^۲-۱\quad,\quad (d)\ ۲x^۲-۵x+۶\leq(x-۳)(x-۲)$$

۴.۱.۲ اتحادها

ابتدا با روش فاکتورگیری آشنا می شویم. در این روش از بین جملات یک چندجمله‌ای، مقدار مشترکی را که در همهٔ جملات وجود دارد در نظر گرفته و آن را از تک تک جملات برمی‌داریم. بطور مثال در سه جمله‌ای $۳a^۳+۱۲a^۵b-۳۰da^۴$ بطور مشخص مقدار $a^۳$ در تمام جملات دیده می شود. علاوه براین ضرایب هر سه جمله بر عدد ۳ قابل قسمتند. بنابراین فاکتور مشترک در این چند جمله ای مقدار $۳a^۳$ خواهد بود و می نویسیم:

$$۳a^۳+۱۲a^۵b-۳۰da^۴=۳a^۳(۱+۴a^۲b-۱۰da)$$

تمرین ۳.۲ کلاسی. از عبارات زیر فاکتور بگیرید

$$۵a^۲xy+۱۰xaby^۲-۲۰dxy^۵a^۴\quad,\quad ۱۲x^۲z^۳+۲۰x^۵z^۴-۸z^۲x^۴$$

اتحادها را بطور خلاصه می توان بصورت زیر فهرست نمود.

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \quad (۱)$$

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲ \quad (۲)$$

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ \quad (۳)$$

$$(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ \quad (۴)$$

(۵) اتحاد مزدوج
$$a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$$

$$a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲) \quad (٦)$$

$$a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲) \quad (۷)$$

(۸) اتحاد جمله مشترک
$$(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$$

مثال ۵.۲ به چند مثال توجه کنید:

$$\begin{aligned}
(a+۳)^۲ &= a^۲ + ٦a + ۹\\
(x-r)^۲ &= x^۲ - ۲xr + r^۲\\
(e+۲)^۳ &= e^۳ + ٦e^۲ + ۱۲e + ۸\\
(a-x)^۳ &= a^۳ - ۳a^۲x + ۳ax^۲ - x^۳\\
a^۲ - ۳^۲ &= (a-۳)(a+۳)\\
a^۳ + ۴^۳ &= (a+۴)(a^۲ - ۴a + ۱٦)\\
z^۳ - ۸ &= (z-۲)(z^۲ + ۲z + ۴)\\
(x+۳)(x+۴) &= x^۲ + ۷x + ۱۲
\end{aligned}$$

مثال ٦.۲ عبارت زیر را ساده کنید

$$\frac{x^۲ - ۲xy + y^۲}{x^۲ - y^۲} \times \frac{x^۳ + x^۲y}{x^۲ - xy}$$

حل. با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\frac{x^۲ - ۲xy + y^۲}{x^۲ - y^۲} \times \frac{x^۳ + x^۲y}{x^۲ - xy} &= \frac{(x-y)^۲}{(x-y)(x+y)} \times \frac{x^۲(x+y)}{x(x-y)}\\
&= \frac{(x-y)}{(x+y)} \times \frac{x(x+y)}{(x-y)} = x
\end{aligned}$$

تمرین ۴.۲ کلاسی. عبارت زیر را ساده کنید

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + x^2y + xy^2} \times \frac{x^3y + x^2y^2}{x^2 - y^2}$$

۵.۱.۲ تعیین علامت

می خواهیم علامت عبارت $P = 2x - 1$ را تعیین کنیم. منظور از علامت یک عبارت عبارتست از علامت آن بازای متغیر x که یک عدد حقیقی است و مطلوب ما علامت این عدد است. مثلاً برای $x = 2$ مقدار $P = 3$ خواهد بود که علامت آن مثبت است و برای $x = 0$ مقدار $P = -1$ خواهد بود که علامت آن منفی است. ما بدنبال بازه هایی هستیم که P مثبت یا منفی می شود. کار را با یک مثال آغاز می کنیم.

مثال ۷.۲ علامت عبارت $P = 2x - 1$ را تعیین کنید.

حل. $P = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		-	0	+	

مطلب ۳.۲ بطورکلی علامت عبارت $P = ax + b$ عبارتست از

$P = ax + b = 0 \Longrightarrow ax = -b \Longrightarrow x = \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	کوچکتر از ریشه	$\frac{-b}{a}$	بزرگتر از ریشه	$+\infty$
P		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

مطلب ۴.۲ علامت عبارت درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$ در حالتی که ریشه نداشته باشد و یا یک ریشه داشته باشد، همیشه **موافق علامت** a است. در حالتیکه دو ریشهٔ x_1 و x_2 داشته باشد، علامت آن بصورت زیر است:

x	$-\infty$		x_1	بین دو ریشه	x_2		$+\infty$
P		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

مثال ۸.۲ بازای چه x هائی $x^2-5x+6>0$ است؟

$$P=x^2-5x+6>0 \Longrightarrow \Delta=1>0 \Longrightarrow x_1=2\ ,\ x_2=3$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
P		+	0	-	0	+	

$$\Longrightarrow \text{جواب}=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$$

مثال ۹.۲ نامعادلهٔ روبرو را حل کنید $\frac{x+1}{2x-1}<\frac{x-2}{x+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x-1} &< \frac{x-2}{x+1}\\
\frac{x+1}{2x-1}-\frac{x-2}{x+1} &< 0\\
\frac{(x+1)(x+1)-(x-2)(2x-1)}{(2x-1)(x+1)} &< 0\\
\frac{-x^2+7x-1}{2x^2+x-1} &< 0
\end{aligned}$$

با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

$$P_1=-x^2+7x-1=0 \Longrightarrow \Delta=45 \Longrightarrow x_1=\frac{-7+\sqrt{45}}{-2}\ ,\ x_2=\frac{-7-\sqrt{45}}{-2}$$

$$P_2=2x^2+x-1=0 \Longrightarrow \Delta=9 \Longrightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{-7+\sqrt{45}}{-2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{-7-\sqrt{45}}{-2}$		$+\infty$
P_1		-	$\vert$	-	0	+	$\vert$	+	0	-	
P_2		+	0	-	$\vert$	-	0	+	$\vert$	+	
P		-	#	+	0	-	#	+	0	-	

$$\Longrightarrow \text{جواب}=(-\infty,-1)\cup\left(\frac{-7+\sqrt{45}}{-2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{-7-\sqrt{45}}{-2},\infty\right)$$

مثال ۱۰.۲ نامعادلهٔ روبرو را حل کنید $\frac{2x+4}{x-1}-\frac{3x}{x+2}\geq 2$

$$\begin{aligned}
\frac{2x+4}{x-1}-\frac{3x}{x+2} &\geq 2\\
\frac{2x+4}{x-1}-\frac{3x}{x+2}-2 &\geq 0\\
\frac{(2x+4)(x+2)-3x(x-1)-2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} &\geq 0\\
\frac{-3x^2+9x+12}{(x-1)(x+2)} &\geq 0
\end{aligned}$$

با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

$$P_1 = -3x^2 + 9x + 12 = 0 \Longrightarrow \Delta = 225$$

$$\Longrightarrow x_1 = \tfrac{-9+\sqrt{225}}{-6}\ ,\ x_2 = \tfrac{-9-\sqrt{225}}{-6} \Longrightarrow x_1 = -1\ ,\ x_2 = 4$$

$$P_2 = (x-1)(x+2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 1\ ,\ x_2 = -2$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		∞
P_1		-	|	-	$\circ$	+	|	+	$\circ$	-	
P_2		+	$\circ$	-	|	-	$\circ$	+	|	+	
P		-	#	+	$\circ$	-	#	+	$\circ$	-	

$$\Longrightarrow \text{جواب} = (-2,-1] \cup (1,4]$$

تمرین ۵.۲ منزل.

۱) عبارات زیر را ساده کنید:

$$(a)\ \frac{x^2+x}{x^2-1}\quad,\quad (b)\ \frac{x^3-1}{2x^2-2x}\quad,\quad (c)\ \frac{x^4-1}{2x^2-2x}\quad,\quad (d)\ \frac{(x-y)^2}{x^3-y^3}$$

$$(e)\ \frac{(x+y)(x^2-xy)^2}{3x^3-3xy^2}\times\frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^4y+xy^4}\quad,\quad (f)\ \frac{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}{2x^3-2y^3}$$

$$(g)\ \frac{a^6-b^6}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}\times\frac{a+b}{a^3+b^3}$$

۲) نامعادلات زیر را حل کنید:

$$(a)\ \frac{2x+4}{x+1} \geq \frac{x+5}{x+1}\quad,\quad (b)\ \frac{x^2-2}{(x+1)^2} > 1\quad,\quad (c)\ \frac{x-1}{x+1}-\frac{x+2}{x-2} \leq 2$$

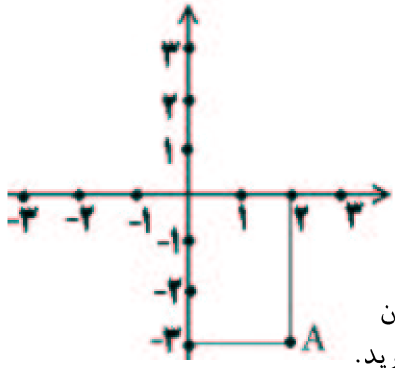
۳) مقادیر A و B و C را چنان بیابید که اتحادهای زیر برقرار باشند.

$$(a)\ \frac{x+1}{x^2-4} \equiv \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$(b)\ \frac{4}{x^2-4x-12} \equiv \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-6}$$

$$(c)\ \frac{5x+1}{x^3-1} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

۲.۲ خط و صفحه



۱.۲.۲ صفحه مختصات دکارتی

دو محور را در نظر بگیرد که در نقطه مبداءشان بر هم منطبقند. لازم نیست بر هم عمود باشند و یا واحد طول روی آنها یکسان باشد ولی بهتر است واحدهای آنها را یکی بگیرید. این دو محور تشکیل صفحهٔ مختصات دکارتی می دهند. هر نقطه در این صفحه دارای دو مختص است که روی دو محور در نظر می گیریم مثلاً $A(+۲,-۳)$ که عدد اول را طول نقطه و عدد دوم را عرض نقطه می نامیم. در هر زوج مرتب (x,y)، x را مختص اول و y را مختص دوم گوئیم. برای رسم این نقطه روی صفحه از محور x–ها دو واحد و از طرف منفی محور عرضها ۳ واحد جدا کرده و نقطه را مشخص می کنیم. اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه مفروض در صفحهٔ مختصات دکارتی باشند، فاصلهٔبین A و B و نیز نقطهٔ P وسط نقاط A و B را چنین تعریف می کنیم.

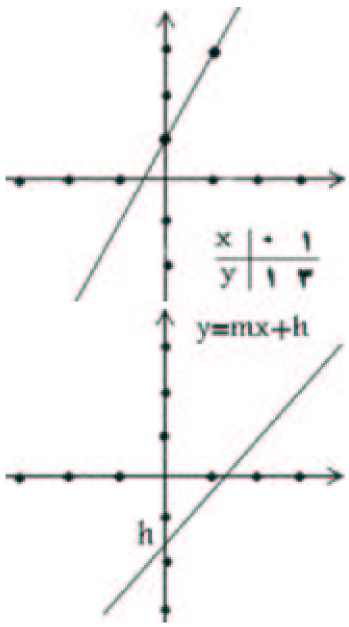
$$\overline{AB}=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲} \quad , \quad x_P=\frac{x_۱+x_۲}{۲} \quad , \quad y_P=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

مثال ۱۱.۲ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۲,-۴)$ و $B(۱,۳)$ را یافته و نقطهٔ P وسط AB را پیدا کنید. **حل.**

$$\begin{aligned}
\overline{AB}=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲} &= \sqrt{(۲-۱)^۲+(-۴-۳)^۲}\\
&= \sqrt{(۱)^۲+(-۷)^۲}=\sqrt{۵۰}\\
x_P=\frac{x_۱+x_۲}{۲} \quad , \quad y_P=\frac{y_۱+y_۲}{۲} &\Longrightarrow x_P=\frac{۲+۱}{۲} \quad , \quad y_P=\frac{-۴+۳}{۲}\\
&\Longrightarrow P(\frac{۳}{۲},\frac{-۱}{۲})
\end{aligned}$$

تمرین ۶.۲ کلاسی. اگر $A(۱,۲)$ و $B(-۲,۱)$ و $C(-۱,-۲)$ سه نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، آنها را در صفحه رسم و مثلث بدست آمده را در نظر بگیرید. طول اضلاع مثلث را بدست آورده و نشان دهید مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین است. سپس نقطهٔ P وسط ضلع BC را یافته و طول میانهٔ $\overline{AP}$ را بیابید.

۲.۲.۲ معادلهٔ خط



در صفحهٔ مختصات هر خط راست متشکل از بینهایت نقطه است. مختصات این نقاط پیوسته در یک معادلهٔ ریاضی صدق می کنند که به آن **معادلهٔ خط** گوئیم. برای مثال هرکدام از معادلات $y = 2x + 1$ و $y = -4x - 14$ یک خط راست را در صفحه مشخص می کنند. برای رسم خط در صفحهٔ مختصات کافیست دو نقطه از خط را مشخص کنیم و سپس خط را رسم نمائیم. رسم خط $y = 2x + 1$ مانند شکل روبرو است.

خطوط در صفحه سه دسته اند، خطوط افقی، قائم و مایل. معادلهٔ خطوط افقی به صورت $y = b$ و معادلهٔ خطوط قائم بصورت $x = a$ است. خطی که افقی یا قائم نباشد، مایل بوده و معادلهٔ خط در حالت **استاندارد** بصورت $y = mx + h$ است که m **شیب** آن و h را **عرض از مبداء** گوئیم. برای خط $y = -4x - 14$ شیب برابر ۴− و عرض از مبداء ۱۴− است، یعنی $m = -4$ و $h = -14$. اگر شیب مثبت باشد خط صعودی و اگر شیب منفی باشد خط نزولی است. عرض از مبداء خط نقطه ای از محور عرضهاست که خط ازآن عبور می کند.

تعریف ۱.۲ دو خط موازی هستند اگر شیب های آنها برابر باشد. دو خط عمودند اگر حاصلضرب شیبهایشان برابر ۱− باشد. پس اگر $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ دو خط باشند آنها موازیند اگر $m = m'$ و عمودند اگر $mm' = -1$. بنابراین دو خط $y = 2x + 4$ و $y = 2x - 5$ با هم موازیند زیرا شیب هر دو ۲ است.

معادلهٔ عمومی خط بصورت $Ax + By + C = 0$ است و برای تبدیل آن به حالت استاندارد با محاسبه شیب $m = \frac{-A}{B}$ و $h = \frac{-C}{B}$ معادلهٔ خط استاندارد را خواهیم نوشت. برای رسم این خطوط بهتر است ابتدا معادلهٔ خط را بصورت استاندارد نوشته و بعد آنرا رسم نمائیم. برای مثال می خواهیم معادلهٔ خط $8x - 4y + 2 = 0$ را در حالت استاندارد بنویسیم. با محاسبهٔ شیب $m = \frac{-8}{-4} = 2$ و عرض از مبدأ $h = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ معادلهٔ خط در حالت استاندارد عبارتست از $y = 2x + \frac{1}{2}$.

مثال ۱۲.۲ مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر

$$(a+3)x-2y+(a+4)=0 \quad , \quad (a+1)x+(a+3)y+2=0$$

الف) با هم موازی باشند. ب) بر هم عمود باشند.

حل. ابتدا حالت استاندارد خطوط را بدست می آوریم:

$$m_1=\frac{-A}{B}=\frac{-a-3}{-2} \quad , \quad h_1=\frac{-C}{B}=\frac{-a-4}{-2}$$

$$m_2=\frac{-A}{B}=\frac{-a-1}{a+3} \quad , \quad h_2=\frac{-C}{B}=\frac{-2}{a+3}$$

برای موازی بودن دوخط می بایست

$$m_1=m_2 \Rightarrow \frac{-a-3}{-2}=\frac{-a-1}{a+3} \Rightarrow (-a-3)(a+3)=(-a-1)(-2)$$

$$\Rightarrow -a^2-6a-9=2a+2 \Rightarrow a=-4\mp\sqrt{5}$$

برای عمود بودن

$$m_1m_2=-1 \Rightarrow \frac{-a-3}{-2}\times\frac{-a-1}{a+3}=-1 \Rightarrow \frac{a+1}{-2}=-1 \Rightarrow a=1$$

تمرین ۷.۲ کلاسی. مقدار عدد a را چنان بیابید که دو خط $y=(a-2)x+a$ و $y=ax+1$ بر هم عمود باشند.

تعریف ۲.۲ معادلهٔ خطی با شیب برابر m که‌از نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ می گذرد از فرمول $y-y_1=m(x-x_1)$ بدست می آید. بعلاوه اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطه مفروض در صفحهٔ مختصات دکارتی باشند، معادلهٔ خطی که از A و B می گذرد از فرمول زیر بدست می آید:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

مثال ۱۳.۲ برای دو نقطهٔ $A(۲,۲)$ و $B(-۲,-۱)$ معادلهٔ خطی که از A و B می گذرد را بدست آورید.
حل.

$$\frac{y-y_۱}{x-x_۱}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\Rightarrow\frac{y-۲}{x-۲}=\frac{-۱-۲}{-۲-۲}\Rightarrow\frac{y-۲}{x-۲}=\frac{-۳}{-۴}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $y-۲=\frac{۳}{۴}(x-۲)$ و با ساده کردن داریم $y=\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۲}$.

مثال ۱۴.۲ محل برخورد دو خط $y=۲x-۱$ و $y=-۳x+۴$ را پیدا کنید.
حل. برای بدست آوردن تقاطع دو خط y—ها را برابر قرار داده و x را بدست می آورده و بعد در یکی از معادلات قرار می دهیم:

$$y=y\ \Rightarrow\ ۲x-۱=-۳x+۴\ \Rightarrow\ ۵x=۵\ \Rightarrow\ x=۱\ \Rightarrow\ y=۱\ \Rightarrow\qquad(۱,۱)$$

مطلب ۵.۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ از خط $Ax+By+C=۰$ برابر است با

$$d=\frac{|Ax_۰+By_۰+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$$

تمرین ۸.۲ منزل.

۱) نقاط $A(-۳,۱)$ و $B(۱,۳)$ و $C(۳,-۱)$ را در صفحهٔ مختصات در نظر بگیرید.
الف) مثلث ΔABC را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.
ب) طول اضلاع مثلث ΔABC را حساب کرده و نشان دهید این مثلث متساوی الساقین است.
ت) در این مثلث، نقطهٔ M وسط پاره خط $\overline{AC}$ را بیابید و طول میانهٔ $\overline{BM}$ را پیدا کنید.
ث) ثابت کنید مثلث ΔABC قائم الزاویه است یعنی $\overline{AC}^۲=\overline{AB}^۲+\overline{BC}^۲$.
ج) مساحت این مثلث را حساب کنید.

۲) دو خط $y=x-۴$ و $y=-۳x+۸$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقطهٔ برخورد آنها را بدست آورید.

۳) دو خط $۶x-۳y=۹$ و $y-۳x+۴=۰$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقطهٔ برخورد آنها را بیابید.

۴) دو خط $y = -۲x - ۱۴$ و $-۳x + ۷y + ۸ = ۰$ چه وضعیتی نسبت بهم دارند؟ (موازیند یا متعامدند یا متقاطعند).

۵) مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر

$y = (۲a - ۱)x + ۴$
$y = (a + ۱)x - ۱$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

٦) مقدار k را چنان بیابید که دو خط زیر

$(k - ۱)x + ky + ۲ = ۰$
$(۲ - ۲k)x + ۴y = ۴$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

۷) a و b را طوری بیابید که دو خط زیر بر هم منطبق شوند.

$y = (a - b)x + b - ۱ \quad , \quad y = ۳ax - ۵a - b$

۸) نشان دهید معادلهٔ خطی که محور x ها را در نقطهٔ a و محور y ها را در نقطهٔ b قطع می کند بصورت زیر است.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$$

پروژه ۱.۲ در صفحهٔ مختصات دکارتی سه نقطهٔ $A(-۱, ۳)$ و $B(-۳, -۱)$ و $C(۵, -۱)$ را مشخص نموده و آنها را بهم وصل نمائید تا مثلث $\triangle ABC$ تشکیل شود.

(الف) طول پاره خطهای $c = \overline{AB}$ و $a = \overline{BC}$ و $b = \overline{AC}$ را بدست آورید.

(ب) مختصات نقطهٔ M وسط پاره خط BC را بدست آورده و طول میانهٔ $\overline{AM}$ را بیابید.

(ج) از فرمول $\overline{AM} = \sqrt{\frac{a}{۲}(b^۲ - c^۲)}$ در هندسه، طول میانه را بدست آورده و جواب را با (ب) مقایسه کنید.

(د) مساحت مثلث $\triangle ABC$ را بدست بیاورید.

(ه) آیا مثلث $\triangle ABC$ قائم الزاویه است؟

فصل ۳

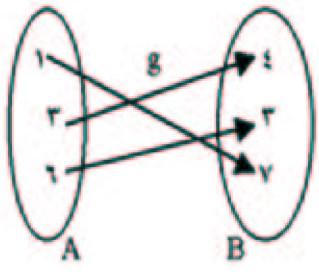
تابع

۱.۳ تعریف

مجموعه‌های A و B را در نظر بگیرید. تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو $a \in A$، یک عضو $b \in B$ را نسبت می دهد. بعبارتی دیگر رابطه ای است که عضوهای A را به عضوهای B می برد و می نویسیم: $f : A \to B$

مجموعهٔ A را **مجموعهٔ آغاز** و مجموعهٔ B را **مجموعهٔ پایان** گوئیم. این ارتباط بین $a \in A$ و $b \in B$ را بصورت زوج مرتب (a, b) نشان می دهیم. مثلاً با فرض $A = \{۱, ۳, ٦\}$ و $B = \{۴, ۳, ۷\}$، دوتابع f و g از A به B را چنین تعریف می کنیم:

$$f : A \to B \qquad\qquad g : A \to B$$
$$f = \{(۱, ۴), (۳, ۳), (٦, ۷)\} \qquad g = \{(۱, ۷), (۳, ۴), (٦, ۳)\}$$



هر دوی f و g توابعی از A به B بوده و باید توجه کنید که این توابع هر مقدار از A را **تنها** به یک مقدار از B می‌برند. این انتقال اعضاء از A به B برای ما بسیار با اهمیت است. قاعده‌ای که طبق آن f اعضائی از A را به اعضائی از B می برد را **ضابطهٔ تابع** گوئیم. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی و $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشند. در نظر بگیرید

$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۵), (۵, ٦), (٦, ۷), \cdots\}$$

چنین ضابطه‌ای که اعضاء $\mathbb{N}$ را به اعضاء $\mathbb{Z}$ می برد، بصورت زیر نوشته می شود:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$f(n) = n + ۱$

تمرین ۱.۳ کلاسی. آیا می توانید برای توابع زیر ضابطه ای بیان کنید؟

$$g = \{(۱, -۱), (۲, -۲), (۳, -۳), (۴, -۴), (۵, -۵), \cdots\}$$
$$h = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۱۰), (۴, ۱۷), (۵, ۲۶), \cdots\}$$
$$f = \{(۱, ۶), (۲, ۸), (۳, ۱۰), (۴, ۱۲), (۵, ۱۴), \cdots\}$$

بالعکس، با داشتن ضابطهٔ تابع می توان اعضاء آنرا بدست آورد. بطور مثال اگر

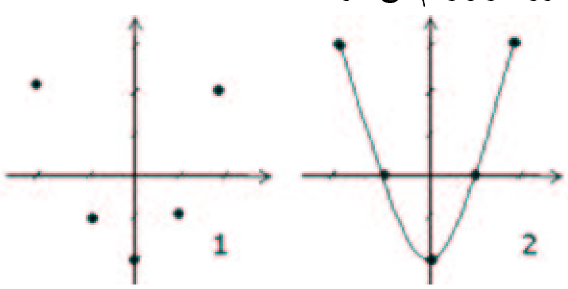
$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad , \quad h(n) = ۲n + ۱$$

باشد، با انتخاب n می توان تابع را بصورت زوجهای مرتب به شکل زیر نمایش داد:
$h = \{(۱, ۳), (۲, ۵), (۳, ۷), (۴, ۹), (۵, ۱۱), \cdots\}$

۱.۱.۳ نمودار تابع

توابع گفته شده در بالا را می توان روی صفحهٔ مختصات دکارتی به شکل زوجهای مرتب نمایش داد. برای مثال اگر بخواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲$ را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کنیم. نقاط دلخواهی برای x انتخاب کرده و با بدست آوردن مقادیر y نقاط را بصورت زوج مرتب می نویسیم. بنابراین نمودار $y = f(x)$ بصورت زیر رسم می شود.

x	y
۲	۲
۱	-۱
۰	-۲
-۱	-۱
-۲	۲



تمرین ۲.۳ کلاسی. توابع $f(x)=x^۲+۳$ و $g(x)=-۲x^۲+۴$ را رسم کنید.

برای تابعی با ضابطهٔ $y=f(x)$، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می نامیم، زیرا وابسته به x است. مسلماً بجای x در این توابع می توان هر عددی را قرار داد. بطورکلی مجموعهٔ تمام مقادیری را که **می توان** بجای x قرار داد را **دامنهٔ تابع** نامند و آنرا با D_f نشان می دهند. برای توابع تمرین۲.۳ فوق، $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ خواهد بود. از طرفی دیگر مقادیری که از تابع $f(x)$ بدست می آید روی محور yها تنها قسمت خاصی را می پوشاند. مجموعهٔ تمام مقادیری که از مقادیر y بدست می آید را **برد تابع** نامیده و با R_f نشان می دهیم. برای توابع تمرین۲.۳ در بالا $R_f=[۳,\infty)$ و $R_g=(-\infty,۴]$ است. روش بدست آوردن دامنه و برد برخی از توابع را در زیر ذکر خواهیم نمود.

۲.۱.۳ دامنهٔ توابع

برای بدست آوردن دامنه **عموماً** روش مشخصی وجود دارد بدین طریق که در توابع **کسری** مخرج باید مخالف صفر باشد و در توابع **رادیکالی** زیررادیکال می بایست مثبت باشد، چون تقسیم بر صفر مجاز نیست. به چند مثال توجه نمائید.

مثال ۱.۳ دامنهٔ $f(x)=\frac{x-۱}{x-۵}$ را بدست آورید.
حل. چون در حالت کسری مخرج می بایست صفر نباشد لذا $x-۵\neq ۰$ یا $x\neq ۵$ بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۵\}$ یعنی تمام اعداد حقیقی بجز ۵.

مثال ۲.۳ دامنه و برد تابع $g(x)=\sqrt{x-۱}$ را بدست آورید.
حل. در حالت رادیکالی زیر رادیکال مثبت است لذا $x-۱\geq ۰$ یا $x\geq ۱$ و این بدین معنی است که تنها اعداد بیشتر از یک قابل قبولند پس $D_g=[۱,+\infty)$.

مثال ۳.۳ دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۳+\sqrt{x+۱}}{x-۲}$ را بدست آورید.
حل. در حالت رادیکالی زیر رادیکال مثبت است لذا $x+۱\geq ۰$ یا $x\geq -۱$ بنابراین $D_۱=[-۱,+\infty)$. از طرفی طبق حالت کسری مخرج می بایست صفر نباشد لذا $x-۲\neq ۰$ یا $D_۲=\mathbb{R}-\{۲\}$. از آنجائیکه هر x باید در صورت و خرج صدق کند، یعنی $D_g=D_۱\cap D_۲$ و بنابراین $R_g=[-۱,+\infty)-\{۲\}$.

مثال ۴.۳ دامنهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۵}}$ را بدست آورید.
حل. چون زیر رادیکال می بایست مثبت باشد پس $\frac{x-۱}{x-۵}\geq ۰$ ریشه‌های صورت و مخرج را بدست آورده و آنرا تعیین علامت می کنیم، پس $D_f=(-\infty,۱]\cup(۵,+\infty)$.

تمرین ۳.۳ کلاسی. دامنهٔ $g(x) = \sqrt{\frac{x-۲}{۵-x}}$ و $h(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ را بدست آورید.

۳.۱.۳ برد توابع

بطور کلی برای بدست آوردن برد روش مشخصی وجود ندارد و ما با ذکر چند مثال حالات خاصی را بررسی می کنیم.

مثال ۵.۳ برد تابع $f(x) = x^۲ + ۳$

حل. می بینیم که چون $x^۲ \geq ۰$ است پس با اضافه کردن مقدار ۳ به طرفین داریم $x^۲ + ۳ \geq ۳$. اما طرف چپ برابر با y است لذا $y \geq ۳$ یعنی $R_f = [۳, \infty)$.

مثال ۶.۳ برد تابع $g(x) = -۲x^۲ + ۴$

حل. چون $x^۲ \geq ۰$ است، با ضرب طرفین در عدد -۲ و عوض شدن طرفین نامساوی، نتیجه می شود که $-۲x^۲ \leq ۰$ با اضافه کردن مقدار ۴ به طرفین داریم $-۲x^۲+۴ \leq ۴$ اما طرف چپ برابر با y است لذا $y \leq ۴$ یعنی $R_g = (-\infty, ۴]$.

مثال ۷.۳ برد تابع $g(x) = \sqrt{x - ۱}$ را بدست آورید.

حل. چون رادیکال همیشه مثبت است پس $y = \sqrt{x-۱} \geq ۰$ یعنی $R_g = [۰, +\infty)$.

مثال ۸.۳ برد تابع $y = ۲x^۲ - ۴x + ۹$ را بدست آورید.

حل. می نویسیم $۲x^۲ - ۴x + ۹ - y = ۰$ و برای معنی دار بودن x باید $\Delta \geq ۰$ پس

$$\Delta \geq ۰ \Longrightarrow (-۴)^۲ - ۴(۲)(۹ - y) \geq ۰ \Longrightarrow ۱۶ - ۸(۹ - y) \geq ۰ \Longrightarrow y \geq ۷$$

و برد برابر $R_f = [۷, +\infty)$ بدست می آید.

مثال ۹.۳ مطلوبست برد تابع $h(x) = \frac{۲x+۱}{x-۴}$

حل. از آنجا که $h(x) = \frac{۲x+۱}{x-۴}$ تابعی کسری است، برای بدست آوردن برد این تابع می نویسیم $y = \frac{۲x+۱}{x-۴}$ با طرفین—وسطین داریم $y(x - ۴) = ۲x + ۱$ و سپس

$$\begin{aligned} y(x-۴) &= ۲x+۱ \\ yx - ۴y &= ۲x + ۱ \\ yx - ۲x &= ۱ + ۴y \\ x(y-۲) &= ۱ + ۴y \\ x &= \frac{۱+۴y}{y-۲} \end{aligned}$$

در این عبارت y نمی تواند مقدار ۲ در مخرج را بپذیرد و $y \neq ۲$ لذا $R_h = \mathbb{R} - \{۲\}$.

۴.۱.۳ اعمال روی توابع

توابع $f: A \to B$ و $g: B \to A$ را در نظر می گیریم. مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع را چنین تعریف می کنیم:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad , \quad D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad , \quad D_{f.g} = D_f \cap D_g$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad , \quad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = ۰\}$$

مثال ۱۰.۳ دامنهٔ تابع $y = \frac{\sqrt{x+۴}}{\sqrt{x}-۳}$ را بدست آورید.

حل. این تابع، خارج قسمت دو تابع $f(x) = \sqrt{x+۴}$ و $g(x) = \sqrt{x} - ۳$ است، بطور جداگانه دامنه ها را بدست می آوریم پس $D_f = [-۴, +\infty)$ و $D_g = [۰, +\infty)$ و طبق تعریف بالا داریم:

$$\begin{aligned} D_{f/g} &= D_f \cap D_g - \{x : g(x) = ۰\} \\ &= [-۴, +\infty) \cap [۰, +\infty) - \{x : \sqrt{x} - ۳ = ۰\} = [۰, +\infty) - \{۹\} \end{aligned}$$

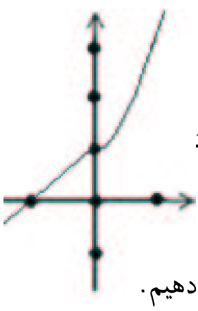
۵.۱.۳ تابع چند ضابطه‌ای

توابع چند ضابطه‌ای که بصورت قطعه ای تعریف می شوند، دارای شکل کلی بصورت

$$f(x) = \begin{cases} \text{ضابطه}\,۱ & ,\text{محدوده}\,۱ \\ \text{ضابطه}\,۲ & ,\text{محدوده}\,۲ \\ \cdots & \\ \text{ضابطه}\,n & ,\text{محدوده}\,n \end{cases}$$

هستند. در این حالت دامنهٔ تابع عبارتست از اجتماع محدوده ها. برای مثال تابع دو ضابطه ای زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & , x \geq ۰ \text{ اگر} \\ x + ۱ & , x \leq -۱ \text{ اگر} \end{cases}$$



شکل این تابع بصورت مقابل بوده و دامنه و برد آن عبارتست از $\mathbb{R}$.
برای بدست آوردن حاصلجمع، حاصلضرب، تفاضل یا خارج قسمت توابع چند ضابطه‌ای، می بایست دامنهٔ آنها را تجزیه کنیم تا بصورت مشابه در بیایند و سپس روی دامنه های مشترک این اعمال را انجام دهیم.

تمرین ۴.۳ منزل.

۱) برای توابع زیر ضابطه ای بیان کنید؟

$$f = \{(1, 0/5), (2, 1), (3, 1/5), (4, 2), (5, 2/5), \cdots\}$$
$$g = \{(1, 2), (2, 8), (3, 18), (4, 32), (5, 50), \cdots\}$$
$$h = \{(1, 0), (2, -1), (3, -2), (4, -3), (5, -4), \cdots\}$$

۲) توابع $f(x) = 3x^2 + 3x + 3$ و $g(x) = -6x^2 + 12x - 6$ را رسم کنید.

۳) دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{2-x}$$

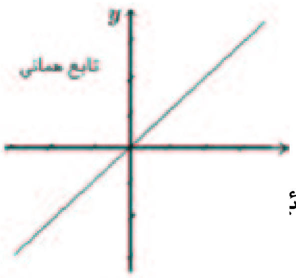
$$h(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{x-2} \quad , \quad i(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2+x}} \quad , \quad j(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{3-x}}$$

۴) برد توابع زیر را مشخص نمائید:

$$y_1 = \frac{2x-1}{x-2} \ , \ y_2 = 4x^2+8x+4 \ , \ y_3 = x^4-2x^2+5 \ , \ y_4 = 3(x+6)^2+5$$

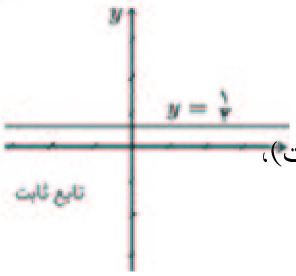
۲.۳ توابع خاص

۱.۲.۳ تابع همانی



تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را که $f(x) = x$ باشد، را **تابع همانی** گوئ

۲.۲.۳ تابع ثابت



تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را که $f(x) = a$ باشد (a عدد ثابت است)، را **تابع ثابت** گوئیم. این تابع یک خط راست موازی محور x–هاست. برای مثال تابع $y = \frac{1}{2}$ تابعی است ثابت.

۳.۲.۳ توابع درجهٔ اول

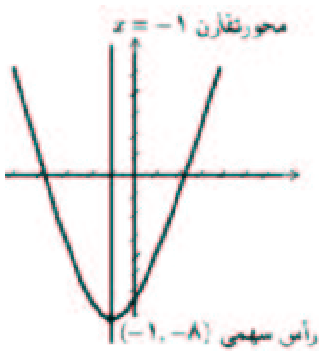
تابعی درجهٔ اول همان تابع خطی است، یعنی $y = mx + h$. در این تابع m را شیب خط و h را عرض از مبدأ خط گوئیم. مانند تابع $y = -۳x - ۵$

۴.۲.۳ توابع درجهٔ دوم

تابع درجه دوم را سهمی گویند و بصورت $y = ax^۲ + bx + c$ است که در آن $a \neq ۰$ و b و c اعدادی حقیقی هستند، مانند $y = ۲x^۲ + ۴x - ٦$. برای رسم سهمی می‌بایست محورتقارن سهمی $x = x_۰$ و رأس سهمی $(x_۰, y_۰)$ را بدست آوریم. محور تقارن سهمی عبارتست از $x_۰ = \frac{-b}{۲a}$. برای بدست آوردن رأس سهمی مقدار طول $x_۰$ بدست آمده در قبل را در معادلهٔ سهمی قرار داده و عرض $y_۰ = \frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ را بدست می آوریم. برای مثال در سهمی $y = ۲x^۲ + ۴x - ٦$، محورتقارن و رأس سهمی عبارتست از:

$$x_۰ = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲ \times ۲} = -۱ \quad , \quad y_۰ = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{-۴۸ - ۱٦}{۸} = -۸$$

محورتقارن $x = -۱$ و رأس سهمی $(-۱, -۸)$ و شکل سهمی چنین می شود.



مطلب ۱.۳ اگر در معادلهٔ سهمی $a > ۰$ باشد، تقعر سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ باشد، تقعر سهمی رو به پائین است.

۵.۲.۳ تابع چند جمله‌ای درجهٔ n—ام

این تابع بصورت زیر تعریف می شود

$$y = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + a_{n-۲} x^{n-۲} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

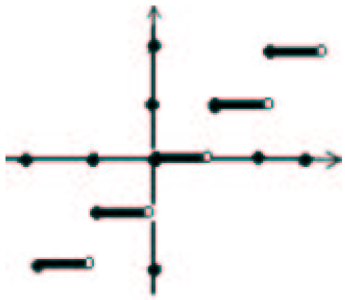
که در آن ضرایب $a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۱, a_۰$ اعداد حقیقی هستند. $a_n \neq ۰$ و $a_۰$ را جملهٔ ثابت چندجمله‌ای نامند.

۳.۲.۶ تابع جزء صحیح (پله‌ای)

جزء صحیح یک عدد x را با $[x]$ نشان داده و برای مثال داریم:

$[-۱/۵۲] = -۲ \quad , \quad [۲/۲۱] = ۲ \quad , \quad [-۶/۴] = -۷ \quad , \quad [۵/۶] = ۵$

اکنون تابع $f(x) = [x]$ را در نظر می گیریم. این تابع که به**تابع جزء صحیح** معروف است به صورت زیر رسم می شود. توجه کنید که $R_f = \mathbb{Z} \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$.

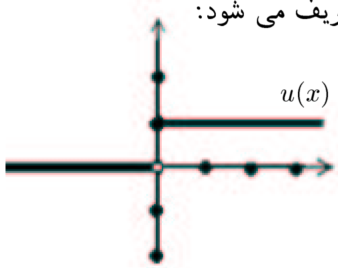


تمرین ۳.۵ تابع $g(x) = ۲[x] + ۱$ را رسم کنید.

۳.۲.۷ تابع پله ای واحد

این تابع، تابعی دو ضابطه ای است و بصورت زیر تعریف می شود:

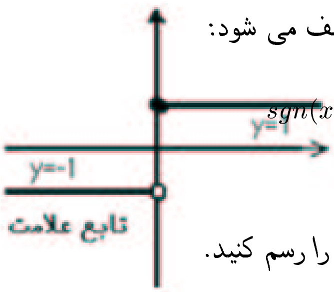
$$u(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad x \geq ۰ \text{ اگر} \\ ۰ & , \quad x < ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$



۳.۲.۸ تابع علامت

تابع علامت، تابعی دو ضابطه ای و بصورت زیر تعریف می شود:

$$sgn(x) = \begin{cases} ۱ & , x \geq ۰ \text{ اگر} \\ -۱ & , x < ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$



مثال ۳.۱۱ تابع $f(x) = u(x-۱) + sgn(x+۱)$ را رسم کنید.

$$f(x) = u(x-۱)+sgn(x+۱) = \begin{cases} ۱ & , \ x-۱ \geq ۰, \\ ۰ & , \ x-۱ < ۰. \end{cases} + \begin{cases} ۱ & , x+۱ \geq ۰, \\ -۱ & , x+۱ < ۰. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & , \ x \geq ۱, \\ ۰ & , \ x < ۱. \end{cases} + \begin{cases} ۱ & , x \geq -۱, \\ -۱ & , x < -۱. \end{cases} = \begin{cases} ۱ & , \ x < -۱, \\ -۱ & , \ -۱ \leq x < ۱, \\ ۰ & , \ x \geq ۱. \end{cases}$$

۹.۲.۳ تابع قدرمطلق

می دانیم قدرمطلق یا اندازهٔ مطلق یک عدد چنین بیان می شود که آن عدد را بدون در نظر گرفتن علامتش می نویسیم، بدین صورت که $۳ = |۳|$ و $۵ = |۵ -|$ است.
تابع قدرمطلق، تابعی دو ضابطه ای است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$= \begin{cases} x & ,x \geq ۰ \text{ اگر} \\ -x & ,x < ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

در واقع تعریف قدر مطلق چنین است که $|x| = \sqrt{x^۲}$.

از این تعریف نتایج زیر دربارهٔ قدرمطلق حاصل می شود:

$$|-a| = |a| \quad , \quad |a-b| = |b-a|$$

$$|ab| = |a|.|b| \quad , \quad |\tfrac{a}{b}| = \tfrac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad , \quad |a-b| \geq |a| - |b|$$

$$|a| < c \Longrightarrow -c < a < c \quad , \quad |x-k| < c \Longrightarrow -c < x-k < c$$

$$|a| > c \Longrightarrow a < -c \text{ یا } a > c \quad , \quad |x-k| > c \Longrightarrow a < -c \text{ یا } a > c$$

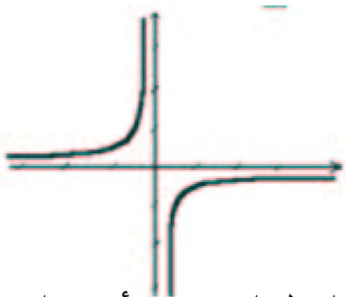
۱۰.۲.۳ توابع هموگرافیک

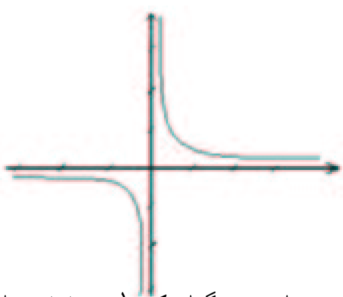
تابع هموگرافیک بصورت

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

تعریف می شود که صورت و مخرج توابعی درجهٔ یک هستند، مانند تابع

$$f(x) = \frac{۲x - ۱}{۳x + ۵}$$





تمرین ٦.۳ کلاسی. تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{۱}{x}$ را با نقطه یابی در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم نمائید.

۱۱.۲.۳ توابع نمائی

تابع نمائی یا تابع توانی بصورت $f(x) = a^x$ تعریف شده و دارای خواص قابل توجهی بصورت زیر است.

$$a^{۰} = ۱ \ , \ a^{۱} = a \ , \ a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \ , \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ , \ a^m.a^n = a^{m+n} \ , \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

در یک حالت خاص وقتی که بجای عدد a از عدد نپر e استفاده کنیم[1]، این تابع خواص و کاربردهای گوناگونی در ریاضیات داراست.

۱۲.۲.۳ توابع لگاریتمی

تابع لگاریتم بصورت $y = log_b^x$ تعریف می شود، چنانکه $x = b^y$. در این تعریف b عددی حقیقی است و پایهٔ لگاریتم نامیده می شود، بعلاوه در حالت کلی می بایست x و b مثبت بوده و $b \neq ۱$ باشد. خواص لگاریتم بصورت زیر است:

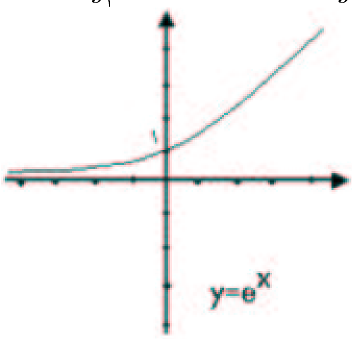
$$log_b^{۱} = ۰ \ , \ log_b^b = ۱ \ , \ logab = loga + logb \ , \ log\frac{a}{b} = loga - logb \ , \ loga^n = nloga$$

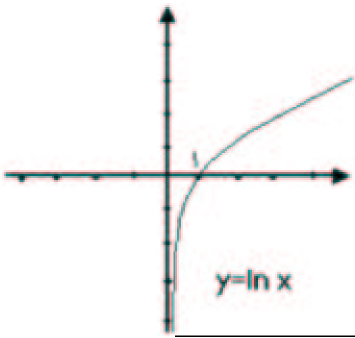
$$log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n} log_b^a \ \ , \ \ log_b^a \times log_a^b = ۱ \ \ , \ \ log_b^a \times log_c^b = log_c^a \ \ , \ \ a^{log_a^x} = x$$

درحالت خاص اگر پایهٔ b برابر e باشد، بجای $y = log_e^x$ می نویسیم $y = lnx$ و آنرا لگاریتم نپری گوئیم. خواص بالا را می توان برای لگاریتم نپری مجدداً بازگو نمود.

مثال ۱۲.۳ حل معادلهٔ $log_۳^{x-۱} + log_۳^{x+۱} = ۱$ حل. طبق خواص لگاریتم:

$$\Rightarrow log_۳^{(x-۱)(x+۱)} = ۱ \Rightarrow log_۳^{x^۲-۱} = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۳ \Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow x = ۲$$





[1] عدد نپر برابر است با...۲/۷۱۸۲

تمرین ۷.۳ منزل.

۱) توابع زیر را رسم کنید.

$$(a) \quad y = x^{۲} + x - ۱$$
$$(b) \quad y = sgn(x+۱) + ۲u(x)$$
$$(c) \quad y = sgn(x) - u(x-۲)$$
$$(d) \quad y = ۲[x] - x + ۱$$

۲) سهمی های زیر را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم نمائید.

$$(a) \ \ y = ۲ - x^{۲} \quad , \quad (b) \ \ y = ۲x^{۲} + ۳x - ۷ \quad , \quad (c) \ \ y = x^{۲} + ۴x - ۱$$

۳) مطلوبست محاسبه و رسم تابع

$$(a) \quad y = ۲sgn(x-۱) - ۳u(x) + ۱$$
$$(b) \quad y = ۲|x| + xsgn(x) + u(x+۱)$$

۴) کدام بزرگترند $log_a^{۲}$ یا $log_a^{۳}$ ؟

۵) ثابت کنید $log_b^a = \frac{lna}{lnb}$

۶) اگر بدانیم $log_{۱۰}^{۲} = a$ و $log_{۱۰}^{۷} = b$ مطلوبست مقدار $log_{۸}^{۹/۸}$؟

۷) مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$$\frac{۱}{\sqrt[x]{۴}} + \frac{۱}{\sqrt[x]{۶}} = \frac{۱}{\sqrt[x]{۹}}$$

۸) مطلوبست حل معادلهٔ $۲۷^x + ۱۲^x = ۲ \times ۸^x$

۹) برای x های مثبت ثابت کنید

$$(a) \quad lne^x = x \quad , \quad (b) \quad e^{lnx} = x$$

۱۰) با استفاده از خواص قدرمطلق نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|\frac{x+۲}{۳x}| < ۴$$

۱۳.۲.۳ ترکیب توابع

توابع $f:A\to B$ و $g:B\to A$ مفروضند. ترکیب این دو تابع را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$fog(x)=f(g(x)) \qquad , \qquad D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

مثال ۱۳.۳ اگر $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ آنگاه مقادیر gof و D_{gof} را حساب کنید.

$$gof(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{x^2-1})=\sqrt{(\frac{1}{x^2-1})+1}$$

و از آنجاکه $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ و $D_g=[-1,+\infty)$ داریم

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}|\frac{1}{x^2-1}\geq -1\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}|\frac{x^2}{x^2-1}\geq 0\}$$

و بنابراین $D_{gof}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

مطلب ۲.۳ ترکیب دو تابع چند ضابطه ای نیز قابل تعریف است. مثلا اگر

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ,x\geq 1 \text{ اگر} \\ 2x & ,x<1 \text{ اگر}\end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} 2x^3+1 & ,x\geq 0 \text{ اگر} \\ 4x+1 & ,-1\leq x<0 \text{ اگر} \\ -1-2x & ,x<-1 \text{ اگر}\end{cases}$$

بنابراین

$$fog(x)=\begin{cases} (2x^3+1)^2-1 & ,x\geq 0 \text{ اگر} \\ 2(4x+1) & ,-1\leq x<0 \text{ اگر} \\ (-1-2x)^2-1 & ,x<-1 \text{ اگر}\end{cases}$$

۱۴.۲.۳ تابع یک به یک، تابع پوشا، تابع دوسوئی

تابع $f : A \to B$ را تابع **یک به یک (۱−۱)** گوئیم اگر بازای هر x و y در A که $f(x) = f(y)$ باشد، سپس نتیجه بگیریم که $x = y$. تابع $f : A \to B$ را پوشا گوئیم اگر برد آن مجموعهٔ B را بپوشاند، یعنی برای هر عضو $b \in B$ عضوی مانند $a \in A$ باشد که $b = f(a)$. بعبارتی دیگر تابع f را پوشا گوئیم اگر $B \subset R_f$.

تمرین ۸.۳ کلاسی. بررسی کنید که آیا توابع $f(x) = x^۳ + ۲$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ یک به یک و پوشا هستند یا نه.

۱۵.۲.۳ تابع وارون

تابع یک به یک $f : A \to B$ را در نظر می‌گیریم. گوئیم تابعی مانند $g : B \to A$ وارون f است اگر

$$fog(y) = y \quad , \quad gof(x) = x$$

وارون تابع f را با $f^{-۱}$ نشان می دهیم. برای مثال تابع $f(x) = \sqrt{x + ۱}$ و تابع $g(x) = x^۲ - ۱$ وارون یکدیگرند زیرا

$$gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x + ۱}) = \sqrt{x + ۱}^{\,۲} - ۱ = x + ۱ - ۱ = x$$

اگر f یک به یک نباشد، دارای وارون نیست. مثالی از بدست آوردن تابع وارون در خلال مثال ۹.۳ گذشت.

مثال ۱۴.۳ وارون تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x-۱}$ را بیابید.
حل. داریم $y = \frac{x+۱}{x-۱}$ سپس $xy + y = x - ۱$ و $xy - x = -۱ - y$ لذا $x = \frac{-۱-y}{y-۱}$ بنابراین $g(x) = \frac{-۱-x}{x-۱}$.

۱۶.۲.۳ توابع صعودی و نزولی

تابع f را صعودی گوئیم اگر $x_۱ \leq x_۲$ نتیجه دهد که $f(x_۱) \leq f(x_۲)$، همچنین f را نزولی گوئیم اگر $x_۱ \leq x_۲$ نتیجه دهد که $f(x_۱) \geq f(x_۲)$. بعنوان مثال تابع $f(x) = ۳x + ۴$ صعودی است زیرا

$$x_۱ \leq x_۲ \Rightarrow ۳x_۱ \leq ۳x_۲ \Rightarrow ۳x_۱ + ۴ \leq ۳x_۲ + ۴ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$$

۱۷.۲.۳ تابع زوج و فرد

تابع f را **زوج** گوئیم اگر دارای دو شرط زیر باشد.
۱) برای هر $x \in D(f)$ داشته باشیم $-x \in D(f)$
۲) $f(-x) = f(x)$
تابع f را **فرد** گوئیم اگر دارای دو شرط زیر باشد.
۱) برای هر $x \in D(f)$ داشته باشیم $-x \in D(f)$
۲) $f(-x) = -f(x)$
تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن بوده و تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است.

مثال ۱۵.۳ تابع $g(x) = -۳x^۲ + ۹$ تابعی زوج است زیرا

$$g(-x) = -۳(-x)^۲ + ۹ = -۳x^۲ + ۹ = g(x)$$

و تابع $h(x) = ۵x^۳ - x$ تابعی فرد است زیرا

$$h(-x) = ۵(-x)^۳ - (-x) = -۵x^۳ + x = -(۵x^۳ - x) = -h(x)$$

بطور کلی توابع چند جمله‌ای که توان زوج دارند یا عددند توابعی زوج و آنها که توانهایی فرد دارند توابعی فردند. بنابراین تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ + ۶x + ۷$ نه زوج است نه فرد، زیرا هم دارای توانهای زوج است و هم دارای توانهای فرد.

۱۸.۲.۳ تابع متناوب

تابع f را متناوب با دوره تناوب T گوئیم، اگر $f(x+T) = f(x)$

مثال ۱۶.۳ تابع $f(x) = x - [x] + ۲$ تابعی متناوب با دوره تناوب ۱ است زیرا

$$f(x+۱) = (x+۱) - [x+۱] + ۲ = x + ۱ - [x] - ۱ + ۲ = x - [x] + ۲ = f(x)$$

تمرین ۹.۳ کلاسی. زوج و فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید:

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱} \quad , \quad g(x) = ۳\sqrt{x} + ۲ \quad , \quad h(x) = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$$

تمرین ۱۰.۳ منزل.

۱) دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید:

$(a)\quad y = -\sqrt{۲x - ۴} - ۱$

$(b)\quad y = ۶ + ۳x - \frac{۱}{\sqrt{۹-x}}$

$(c)\quad y = \frac{۷}{x^{۲}}$

$(d)\quad y = \frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$

$(e)\quad y = x^{۲} + x + ۱$

$(f)\quad y = ۲x^{۲} + ۱ - \sqrt{x - ۴}$

$(g)\quad y = \sqrt{x - ۲} + \sqrt{۲ - x}$

۲) اگر $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۵}$ و $g(x) = ۲\sqrt{x} - ۱$ مقادیر gof و D_{gof} را حساب کنید.

۳) اگر $g(x) = \frac{x}{x+۴}$ و $g(x) = \sqrt{x^{۲} - ۱}$ مقادیر fog و D_{fog} را حساب کنید.

۴) آیا دو تابع زیر وارون یکدیگرند؟

$$f(x) = \frac{۱}{۱ + x} \quad , \quad h(x) = \frac{۱ - x}{x}$$

۵) وارون توابع زیر را بدست آورید.

$$(a)\ y = \frac{۲ - x}{۲x + ۳} \quad , \quad (b)\ y = \sqrt{۲x^{۲} - ۱} + ۷ \quad , \quad (c)\ y = \frac{\sqrt{x} - ۱}{\sqrt{x}}$$

۶) زوج و فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید:

$$h(x) = u(x) - u(-x) \quad , \quad i(x) = ۲|x| + ۳ \quad , \quad j(x) = ||x| - ۱|$$

۷) نشان دهید تابع $f(x) = x^{۳} - ۱$ تابعی صعودی است.

۸) مقادیر عددی عبارات زیر محاسبه کنید.

$$log_{۳}^{۹} + log_{۲}^{۸} \quad , \quad log_{\sqrt{۳}}^{۸۱} \quad , \quad log_{\sqrt{۵}}^{\sqrt[۳]{(۲۵)^{۵}}} \quad , \quad log_{۲}^{۳۰} + log_{۲}^{۱۵} - log_{۲}^{۹} \quad , \quad log_{۱۰}^{۰/۱}$$

۹) مطلوبست حل معادلات زیر

$$(a)\quad log_5^x + log_5^{x+4} = 1 \quad , \quad (b)\quad log_3^{x+2} - log_3^{2x+1} = 2$$

۱۰) جواب دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} lnx - lny = 2 \\ 2x - y = 4(e-1) \end{cases} .$$

۱۱) اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ مقدار $fff(1)$ چیست.

۱۲) اگر $f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = x$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۱۳) اگر $f(x-1) + 2f(1-x) = 1-x$ باشد، مقدار $f(x)$ را بیابید.

۱۴) تابع لگاریتم تابعی است زوج یا فرد؟ نمودار تابع $y = ln|x|$ را رسم کنید.

۱۵) ثابت کنید مجموع و تفاضل دو تابع زوج یا دو تابع فرد، زوج است.

۱۶) ثابت کنید حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع زوج و فرد، فرد است.

۱۷) ثابت کنید هر تابع را می توان بصورت یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

فصل ۴

توابع مثلثاتی

۱.۴ تعاریف

۱.۱.۴ زاویه

تعریف ۱.۴ نیمخط Ox و نقطهٔ A روی آن را در نظر بگیرید. از دوران A حول O زاویه بدست می آید. نقطهٔ O را راس زاویه $\angle xoy$ گوئیم.

در واقع زاویه از دوران یک نیمخط بدست می آید.

اگر نیمخط دوران کند تا بر خودش منطبق شود این زاویه را یک دور کامل گوئیم.

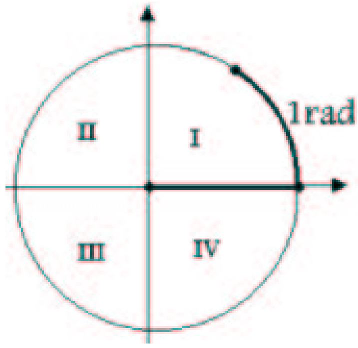
درجه زاویه ای است که از دوران یک نیمخط حول راس باندازه $\frac{۱}{۳۶۰}$ یک دوران کامل بدست آید و آنرا با $(^o)$ نشان می دهیم. اجزای درجه عبارتند از دقیقه $(')$ که یک $\frac{۱}{۶۰}$ درجه و ثانیه $('')$ که $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه است و برای مثال می نویسیم $\angle AOB = ۲۳^o۴۵'۵۶''$.

گراد زاویه ای است که از دوران یک نیمخط حول راس باندازه $\frac{۱}{۴۰۰}$ یک دوران کامل بدست آید و آنرا با gr نشان می دهیم. اجزای گراد نیز عبارتند از دسی گراد ($\frac{۱}{۱۰}$ گراد)، سانتیگراد ($\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد) و میلیگراد ($\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد) و برای مثال چنین می نویسیم $\angle AOB = ۲۳/۵۴۷۸$.

رادیان زاویه ای است که از دوران یک شعاع از دایره بدور مرکز آن بدست می آید، بطوریکه اندازهٔ کمان مساوی شعاع دایره باشد. رادیان مستقل از شعاع بوده و به اندازهٔ شعاع دایره بستگی ندارد.

$1rad =$ یک دور کامل $/(2\pi)$

بنابراین محیط دایره 2π رادیان می باشد.



۲.۱.۴ دایرهٔ مثلثاتی

تعریف ۲.۴ دایره ای است منطبق بر مرکز مختصات و به شعاع واحد و جهت مفروض روی آن. جهت مثبت روی این دایره در جهت گردش عقربه های ساعت فرض شده و جهت منفی در جهت عقربه‌های ساعت است. صفحهٔ مختصات دایرهٔ مثلثاتی را به چهار ربع تقسیم می کند، ربع اول I، ربع دوم II، ربع سوم III و ربع چهارم IV.

تقسیم دایره به قسمتهای مساوی را زاویه گوئیم و عموماً دایرهٔ مثلثاتی به سه نوع زاویه تقسیم می شود:

۱– دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم و هرقسمت را یک درجه گوئیم و با D نشان می دهیم. لذا دایره ۳۶۰ درجه است.

۲– دایره را به ۴۰۰ قسمت تقسیم و هر قسمت را یک گراد گوئیم و آنرا با G نشان می دهیم. لذا دایره ۴۰۰ گراد است.

۳– از روی دایره به اندازهٔ شعاع جدا می کنیم و هر قسمت را یک رادیان گوئیم و آنرا با R نشان می دهیم. پس هر دایره 2π رادیان است.

رابطهٔ بین سه زاویه چنین است $\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi}$ یا

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثال ۱.۴ مقدار ۳۰ درجه چند گراد و چند رادیان است؟ **حل.**

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Longrightarrow \frac{30}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

بنابراین $G = \frac{100}{3}$ و $R = \frac{\pi}{6}$

تمرین ۱.۴ کلاسی. مقدار ۱۰۰ گراد چند درجه و چند رادیان است؟

تمرین ۲.۴ کلاسی. $\frac{\pi}{۴}$ رادیان چند گراد و چند درجه است؟

هر دو نقطهٔ متمایز روی دایره آنرا بدو کمان تقسیم می کنند که به آنها کمانهای جهتدار مثلثاتی گوئیم. هر کمان جهتدار مثلثاتی روی دایره یک زاویهٔ اصلی به شمار می رود. اگر جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت با شد آنرا مثبت و گرنه منفی می گیریم. اگر از مبدأ دایرهٔ مثلثاتی شروع به گردش در جهت مثبت کنیم، با کسر تعداد دوران حول مرکز مقدار زاویهٔ اصلی بدست می آید. برای مثال زاویهٔ ۱۰۰۰ درجه را می توان بصورت ۲۸۰ + ۷۲۰ درجه می توان نوشت. مقدار ۲۸۰ که از ۳۶۰ یعنی یکدور کمتر است زاویهٔ اصلی بشمار می رود. بنابراین، پس از n دور زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی زاویه بر حسب واحدهای مختلف چنین بیان می شود.

$$n \times ۳۶۰ + \alpha \quad ,n \times ۴۰۰ + \beta \quad ,n \times ۲\pi + \gamma$$

برای مثال $۲۳۵۰^o = ۶ \times ۳۶۰^o + ۱۹۰^o$ و یا $۱۷۳۰gr = ۴ \times ۴۰۰gr + ۱۳۰gr$. انتهای کمان دلخواه در یکی از ربع ها قرار خواهد گرفت. مثلاً انتهای کمان اول در ربع سوم و انتهای کمان دوم در ربع دوم قرار خواهد گرفت.

تمرین ۳.۴ کلاسی. انتهای کمان $۲۳۶۵D$ و $۲۵۱\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ در کدام ربع از دایره مثلثاتی است؟

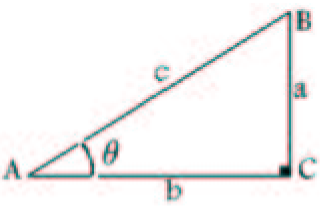
۲.۴ توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی از کاربردی ترین توابع ریاضی و از قدیمی‌ترین آنها بشمار می روند. اکثر این توابع حاصل کار دانشمندان مسلمان است و بدون آنها ریاضیات ناقص خواهد بود. در ذیل با ذکر تعاریفی این توابع را معرفی خواهیم نمود.

۱.۲.۴ نسبتهای مثلثاتی

مثلث قائم الزاویهٔ مفروضی را با اضلاع a, b, c و زاویهٔ $\angle BAC = \theta$ در نظر بگیرید. نسبتهای چهارگانه را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$sin\theta = \frac{a}{c}$، ضلع مقابل به وتر

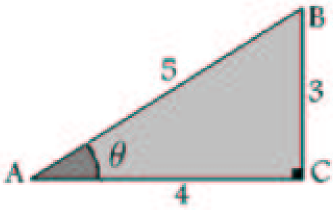


$cos\theta = \frac{b}{c}$، ضلع مجاور به وتر

$tg\theta = \frac{a}{b}$ ، ضلع مقابل به مجاور

$cotg\theta = \frac{b}{a}$، ضلع مجاور به مقابل

مثال ۲.۴ در مثلث مقابل نسبتهای چهارگانه چنین هستند:



$sin\theta = \frac{۳}{۵}$، ضلع مقابل به وتر

$cos\theta = \frac{۴}{۵}$، ضلع مجاور به وتر

$tg\theta = \frac{۳}{۴}$ ، ضلع مقابل به مجاور

$cotg\theta = \frac{۴}{۳}$، ضلع مجاور به مقابل

با استفاده از روشهائی ساده، مقادیر نسبتهای مثلثاتی را می توان بدست آورد که ما آنها را در جدول زیر ذکر می کنیم.

زاویه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tg	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
$cotg$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

مثال ۳.۴ با استفاده از جدول بالا مقادیر $۲sin۴۵ + ۴cos^{۲}۳۰$ و $tg۳۰sin۶۰ - sin^{۲}۳۰$ را حساب کنید.

$$۲sin۴۵ + ۴cos^{۲}۳۰ = ۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲} = \sqrt{۲} + ۴(\frac{۳}{۴}) = \sqrt{۲} + ۳$$

$$tg۳۰ \times sin۶۰ - sin^{۲}۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - (\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

تمرین ۴.۴ کلاسی. مقدار $۴sin۶۰cos۳۰ + (۶tg۳۰)^{۲}$ را حساب کنید.

مطلب ۱.۴ عکس کسینوس یک زاویه را سکانت (sec) و عکس سینوس یک زاویه را کسکانت (csc) آن زاویه گویند، یعنی

$$sec\theta = \frac{۱}{cos\theta} \quad , \quad csc\theta = \frac{۱}{sin\theta}$$

اگر انتهای کمان مثلثاتی در ربع اول بود از جدول بالا مقادیر را محاسبه می کنیم برای دیگر ربع ها، نسبتهای مثلثاتی علامتهای مختلفی دارند که در جدول زیر ذکر می گردد:

ربع	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cotg	+	-	+	-

برای محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی در سایر ربع ها چنین عمل می کنیم:

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم
$sin(۲\pi-\theta)=-sin\theta$	$sin(\pi+\theta)=-sin\theta$	$sin(\pi-\theta)=sin\theta$
$cos(۲\pi-\theta)=cos\theta$	$cos(\pi+\theta)=-cos\theta$	$cos(\pi-\theta)=-cos\theta$
$tg(۲\pi-\theta)=-tg\theta$	$tg(\pi+\theta)=tg\theta$	$tg(\pi-\theta)=-tg\theta$
$cotg(۲\pi-\theta)=-cotg\theta$	$cotg(\pi+\theta)=cotg\theta$	$cotg(\pi-\theta)=-cotg\theta$

مثال ۴.۴ مقدار عبارت $sin۲۴۰cos۳۳۰$ را بیابید.

حل. $sin۲۴۰cos۳۳۰=sin(۱۸۰+۶۰)cos(۳۶۰-۳۰)=-sin۶۰cos۳۰=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\frac{۳}{۴}$

مثال ۵.۴ مقدار عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{sin۲۱۰}{cos۳۰۰+tg۲۲۵}$$

حل.

$$\frac{sin۲۱۰}{cos۳۰۰+tg۲۲۵}=\frac{sin(۱۸۰+۳۰)}{cos(۳۶۰-۶۰)+tg(۱۸۰+۴۵)}=\frac{-sin۳۰}{+cos۶۰+tg۴۵}$$

$$=\frac{-\frac{۱}{۲}}{+\frac{۱}{۲}+۱}=-\frac{۱}{۳}$$

تمرین ۵.۴ کلاسی. مقدار عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{۳sin۱۵۰+cos۲۴۰}{۲cotg۱۳۵-tg۳۱۵}$$

برای زوایای بزرگتر نیز ابتدا زاویه اصلی را بدست آورده و سپس از جدول ذیل و جداول بالا بهره می بریم.

$$\begin{aligned} sin(n\times ۳۶۰+\theta) &= sin\theta \\ cos(n\times ۳۶۰+\theta) &= cos\theta \\ tg(n\times ۳۶۰+\theta) &= tg\theta \\ cotg(n\times ۳۶۰+\theta) &= cotg\theta \end{aligned}$$

مثال ۶.۴ مقدار عبارت $tg۱۳۰۰+۲cos۱۵۹۰$ را بیابید.

حل. $tg(۳\times ۳۶۰+۲۴۰)+۲cos(۴\times ۳۶۰+۱۵۰)=tg(۱۸۰+۶۰)+۲cos(۱۸۰-۳۰)=tg۶۰-۲cos۳۰=\sqrt{۳}-۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۰$

در آخر اینکه برای زوایای منفی نسبت ها چنینند:

$$sin(-\theta)=-sin\theta\ ,\ cos(-\theta)=cos\theta\ ,\ tg(-\theta)=-tg\theta\ ,\ cotg(-\theta)=-cotg\theta$$

۲.۲.۴ توابع مثلثاتی

از آنجا که برای هر زاویه‌ای می توان مقادیر نسبتهای چهارگانه را بدست آورد، بنابراین می توان بجای مقدار زاویه متغیری دلخواه مانند x قرار داد. بدین ترتیب تابع $sinx$ برای مقادیر مختلف زاویهٔ x یک مقدار حقیقی خواهد بود. نسبتهای مثلثاتی دیگر نیز توابعی را تشکیل می دهند و توابع مثلثاتی عبارت خواهند بود از:

$$sinx \quad , \quad cosx \quad , \quad tgx \quad , \quad cotgx$$

که x متغیری دلخواه بوده و معمولاً برحسب رادیان بیان می شود. روابط بین توابع مثلثاتی بصورت زیر است:

$$sin^۲x+cos^۲x=۱ \qquad tgx=\frac{sinx}{cosx} \qquad cotgx=\frac{cosx}{sinx}$$
$$tgxcotgx=۱ \qquad tgx=\frac{۱}{cotgx} \qquad cotgx=\frac{۱}{tgx}$$
$$۱+tg^۲x=\frac{۱}{cos^۲x} \qquad ۱+cotg^۲x=\frac{۱}{sin^۲x}$$
$$sinx=\pm\sqrt{۱-cos^۲x} \qquad sinx=\pm\frac{tgx}{\sqrt{۱+tg^۲x}} \qquad sinx=\pm\frac{۱}{\sqrt{۱+cotg^۲x}}$$
$$cosx=\pm\sqrt{۱-sin^۲x} \qquad cosx=\pm\frac{۱}{\sqrt{۱+tg^۲x}} \qquad cosx=\pm\frac{cotgx}{\sqrt{۱+cotg^۲x}}$$

مثال ۷.۴ اگر $sin(x) = \frac{-۴}{۵}$ و انتهای کمان در ربع سوم باشد مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x

حل. در ربع سوم cos منفی و tg و $cotg$ مثبت خواهند بود. با استفاده از روابط بالا

$$cosx = -\sqrt{۱ - sin^۲x} = -\sqrt{۱ - (\frac{-۴}{۵})^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۳}{۵}$$

$$tgx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}} = \frac{۴}{۳} \quad , \quad cotgx = \frac{۱}{tgx} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

تمرین ۶.۴ کلاسی. اگر $cos(x) = -\frac{۱}{۴}$ و انتهای کمان در ربع دوم باشد، مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

مثال ۸.۴ عبارت $sinx\ (tgx + cotgx)$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned} sinx\ (tgx + cotgx) &= sinx\ (\frac{sinx}{cosx} + \frac{cosx}{sinx}) \\ &= sinx\ (\frac{sin^۲x + cos^۲x}{cosx\ sinx}) \\ &= sinx\ (\frac{۱}{cosx\ sinx}) \\ &= \frac{۱}{cosx} \end{aligned}$$

مثال ۹.۴ عبارت $sin^۲x\ cos^۲x(۲ + tg^۲x + cotg^۲x)$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned} sin^۲x\ cos^۲x(۲ + tg^۲x + cotg^۲x) &= sin^۲x\ cos^۲x(۱ + tg^۲x + ۱ + cotg^۲x) \\ &= sin^۲x\ cos^۲x(\frac{۱}{cos^۲x} + \frac{۱}{sin^۲x}) \\ &= sin^۲x\ cos^۲x(\frac{sin^۲x + cos^۲x}{cos^۲x\ sin^۲x}) \\ &= sin^۲x\ cos^۲x(\frac{۱}{cos^۲x\ sin^۲x}) \\ &= ۱ \end{aligned}$$

۳.۲.۴ نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه

مقادیر نسبتهای دو کمان برای کمانهای دلخواه a و b چنینند:

$$sin(a+b) = sina\ cosb + cosa\ sinb \quad , \quad sin(a-b) = sina\ cosb - cosa\ sinb$$

$$cos(a+b) = cosa\ cosb - sina\ sinb \quad , \quad cos(a-b) = cosa\ cosb + sina\ sinb$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{۱ - tga\ tgb} \quad , \quad tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{۱ + tga\ tgb}$$

$$cotg(a+b) = \frac{cotga\ cotgb - ۱}{cotga + cotgb} \quad , \quad cotg(a-b) = \frac{cotga\ cotgb + ۱}{cotga - cotgb}$$

مثال ۱۰.۴ مقدار $sin۱۵^o$ را حساب کنید.
حل. با استفاده از سینوس تفاضل دو کمان می نویسیم
$sin۱۵ = sin(۴۵ - ۳۰) = sin۴۵cos۳۰ - cos۴۵sin۳۰ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

تمرین ۷.۴ کلاسی. مقدار $tg۷۵^o$ را حساب کنید.
با استفاده از فرمولهای فوق، می توان حاصلجمع و تفاضل توابع مثلثاتی را به شکل زیر بدست آورد:

$$sina\ cosb = \frac{۱}{۲}[sin(a+b) + sin(a-b)]$$

$$sina\,sinb = \frac{-۱}{۲}[cos(a+b) - cos(a-b)] \quad , \quad cosa\,cosb = \frac{۱}{۲}[cos(a+b) + cos(a-b)]$$

$$cosp + cosq = ۲cos(\frac{p+q}{۲})cos(\frac{p-q}{۲}) \quad , \quad cosp - cosq = -۲sin(\frac{p+q}{۲})sin(\frac{p-q}{۲})$$

$$sinp + sinq = ۲sin(\frac{p+q}{۲})cos(\frac{p-q}{۲}) \quad , \quad sinp - sinq = ۲cos(\frac{p+q}{۲})sin(\frac{p-q}{۲})$$

$$tgp \pm tgq = \frac{sin(p \pm q)}{cosp\ cosq} \quad , \quad cotgp \pm cotgq = \frac{sin(q \pm p)}{sinp\ sinq}$$

۴.۲.۴ نسبتهای دو برابر کمان

می خواهیم مقدار $sin۲x$ را محاسبه کنیم. با استفاده از فرمولهای قبل

$$sin(۲x) = sin(x+x) = sinxcosx + cosxsinx = ۲sinxcosx$$

بنابراین اگر در فرمولهای حاصلجمع دو زاویه، قرار دهیم $a = b = x$ فرمولهای زیر برای دو برابر کمان x بدست می آیند:

$$sin۲x = ۲sinx\ cosx$$

$$cos۲x = cos^۲x - sin^۲x \quad , \quad cos۲x = ۲cos^۲x - ۱ \quad , \quad cos۲x = ۱ - ۲sin^۲x$$

$$sin^۲x = \frac{۱-cos۲x}{۲} \quad , \quad cos^۲x = \frac{۱+cos۲x}{۲}, \quad tg^۲x = \frac{۱-cos۲x}{۱+cos۲x}$$

$$tg۲x = \frac{۲tgx}{۱-tg^۲x} \quad , \quad cotg۲x = \frac{cotg^۲x-۱}{۲cotgx}$$

$$sinx = \frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱+tg^۲\frac{x}{۲}} \quad , \quad cosx = \frac{۱-tg^۲\frac{x}{۲}}{۱+tg^۲\frac{x}{۲}}$$

مثال ۱۱.۴ عبارت $\frac{cos۲a-۱}{sin۲a}$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned} \frac{cos۲a-۱}{sin۲a} &= \frac{۱-۲sin^۲a-۱}{sin۲a} \\ &= \frac{-۲sin^۲a}{۲sin\ cosa} \\ &= \frac{-sina}{cosa} \\ &= -tga \end{aligned}$$

مثال ۱۲.۴ عبارت $\frac{۱+sin۲x}{sinx+cosx}$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned} \frac{۱+sin۲x}{sinx+cosx} &= \frac{sin^۲x+cos^۲x+۲sinx\ cosx}{sinx+cosx} \\ &= \frac{(sinx+cosx)^۲}{sinx+cosx} \\ &= sinx+cosx \end{aligned}$$

تمرین ۸.۴ کلاسی. عبارات زیر را ساده کنید.

$$\frac{tg۲\theta\ cos۲\theta}{۲sin\theta} \quad , \quad sin۷۵^o cos۱۵^o$$

تمرین ۹.۴ منزل.

۱) مقدار ۱۱۱۰ درجه را بر حسب رادیان و گراد بیان کنید و آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۲) مقدار ۹۵۰ گراد چند درجه و چند رادیان است، روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۳) مقدار $\frac{۱۰\pi}{۳}$ رادیان را بر حسب درجه و گراد بدست آورید و آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۴) حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$(a)\quad \frac{۴sin۱۵۰-۲cos۱۲۰}{۳tan^{۲}۳۰+cot۲۱۰}\quad,\quad (b)\quad \frac{٦tan^{۲}۲۱۰-۲sin۳۳۰}{٦cot^{۲}۲۱۰-۴cos۳۰۰}$$

$$(c)\quad \left(\frac{۲tan۳۰۰-cot۱۲۰}{cos۱۸۰-۴sin^{۲}۳۰}\right)^{۲}\quad,\quad (d)\quad \frac{tan۲۲۵cos۲۷۰-cot۲۲۵}{۱-tan^{۲}۳۰۰}$$

$$(e)\quad \frac{۱-tan^{۲}۲۱۰}{۱+tan^{۲}۲۱۰}\quad,\quad (f)\quad (۱+tan^{۲}(۲۴۰))cos^{۲}\,۱۵۰$$

۵) در مثلث مقابل مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$sinA+۴cotgB-tgA\times sinB$$

٦) عبارات زیر را ساده کنید:

$$(a)\quad (cos\theta tan\theta)^{۲}+(sin\theta cot\theta)^{۲}\quad,\quad (b)\quad \frac{(۱+tgx)(۱-cotgx)}{(۱+cotgx)(۱-tgx)}$$

$$(c)\quad cosy\left(\frac{۲}{cosy}+tgy\right)\left(\frac{۱}{cosy}-۲tgy\right)+۳tgy\quad,\quad (d)\quad \left(\frac{sin\theta}{tan\theta}\right)^{۲}+\left(\frac{cos\theta}{cot\theta}\right)^{۲}$$

$$(e)\quad \frac{sin^{۲}x-cos^{۲}x-۱}{cotg^{۲}x}\quad,\quad (f)\quad \frac{sin۲\theta+۱}{sin\theta+cos\theta}\quad,\quad (g)\quad \frac{sint}{۱+cost}+\frac{۱+cost}{sint}$$

۷) ثابت کنید:

$$(a)\quad \frac{tgA-tgB}{cotgA-cotgB}=-\frac{tgA}{cotgB}\quad,\quad (b)\quad \frac{2sin\alpha.cos3\alpha}{sin2\alpha}=2cos2\alpha-1$$

$$(c)\quad cos2x(1+tgx.tg2x)=1\quad,\quad (d)\quad \frac{1+cos\alpha+cos2\alpha}{sin\alpha+sin2\alpha}=cotg\alpha$$

$$(e)\quad \frac{tgx}{sinx.cos^2x(1+tan^2x)}\quad,\quad (f)\quad \frac{sin2\alpha.cos\alpha}{1+cos2\alpha}=sin\alpha$$

۸) مقادیر $sin3x$ و $cos3x$ را بر حسب $sinx$ و $cosx$ حساب کنید.

۹) در ساعت ۴ و ۴۰ دقیقه زاویهٔ عقربه های ساعت چقدر است؟

۱۰) در ساعت ۵ و ۱۰ دقیقه زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت چقدر است؟

۱۱) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$(a)\quad cos4x=cosx\quad,\quad (b)\quad sin3x=cos(\frac{\pi}{2}-x)\quad,\quad (c)\quad 2cos^2x=sinx-1$$

$$(d)\quad sinx+cosx=5\quad,\quad (e)\quad 3cos^3x-cosx=0\quad,\quad (f)\quad 3cotgx=tgx$$

$$(g)\quad sinx+cosx=1+2sinxcosx\quad,\quad (h)\quad \frac{sinx+sin2x}{sinx-sin2x}=\frac{1}{2}$$

۱۲) اگر $tgz=\frac{a-1}{b}$ و $cotgz=\frac{3}{a-2}$ با شد چه رابطه ای بین a و b برقرار است.

۱۳) اگر $30^o\leq\alpha\leq 60^o$ باشد و $cos\alpha=2-3m$، m درچه فاصله‌ای تغییرمی کند؟

۱۴) اگر $60^o\leq\alpha\leq\frac{500}{4}G$ باشد و $cos\alpha=\frac{3m+1}{m-2}$، m درچه فاصله‌ای تغییرمی کند؟

۱۵) اگر $sin36^o=0/5878$ و $sin37^o=0/6018$ باشد مقدار $sin(36^o,25')$ را حساب کنید.

۱۶) اگر $tgx=\frac{m+1}{m}$ و $cosx=\frac{m}{m+2}$ مقدار m را حساب کنید و انتهای کمان x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است.

۱۷) در معادلهٔ مثلثاتی $(m-۲)tg^{۲}x+(۲m-۱)tgx-۲=۰$
(اولاً) تعیین کنید بازای چه مقادیری از m معادله جواب دارد.
(ثانیاً) بازای $m=-۳$ جوابها را بیابید.

۱۸) معادلهٔ $x^{۲}-(tg\alpha+۳cotg\alpha)x+۳=۰$ را حل کنید.

۱۹) اگر در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\angle A=۱۲۰^{\circ}$ ثابت کنید $tg۳B+tg۳C=۰$

پروژه ۱.۴ (معکوس مثلثاتی)
به عنوان توابعی ریاضی، توابع مثلثاتی نیز دارای وارون می باشند. وارون تابع $sinx$ را با $arcsinx$ نشان داده و آن عبارت از زاویه‌ای است که سینوس آن x است. پس اگر $sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $arcsin\frac{۱}{۲}$ برابر با $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. به همین ترتیب معکوس تابع $cosx$ را با $arccosx$ و معکوس تابع tgx را با $arctgx$ و معکوس تابع $cotgx$ را با $arccotgx$ نشان می دهیم. طبق تعریف تابع وارون

$$arcsin(sin\theta)=\theta \quad , \quad sin(arcsin\theta)=\theta$$

و این خاصیت برای مابقی توابع مثلثاتی وارون (معکوس مثلثاتی) نیز برقرار است.
(الف) ثابت کنید تابع $arcsinx$ تنها در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ یک به یک است و بنابراین تنها در این فاصله تعریف شده است.
(ب) دامنه تعریف توابع $arccosx$ و $arctgx$ و $arccotgx$ را نیز بدست بیاورید.
(ج) ثابت کنید:

$$arcsinx+arccosx=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad arctgx+arccotgx=\frac{\pi}{۲}$$

پروژه ۲.۴ (زوایای مثلث)
اگر $A=-۱۵۲۵G$ و $B=۲۵۴۰۲D$ و $C=\frac{۱۲۳\pi}{۱۲}$ انتهای کمانهای A,B,C را روی دایرهٔ مثلثاتی بیابید و ثابت کنید مثلث ABC یک مثلث متوازی‌الاضلاع است، سپس مساحت آنرا بدست آورید.

پروژه ۳.۴ (حل مثلث)
با فرض یک مثلث با اضلاع a,b,c و زوایای A,B,C قانون سینوسها و کسینوسها را ثابت کنید:

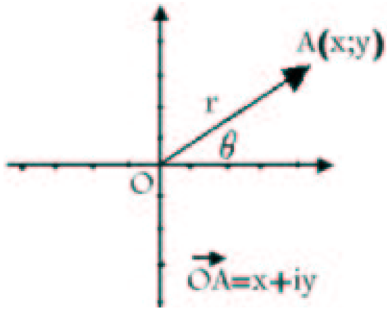
$$\frac{sinA}{a}=\frac{sinB}{b}=\frac{sinC}{c} \quad , \quad a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bcCosA \quad , \quad S=\frac{۱}{۲}ab\ sinC$$

(S مساحت مثلث است)

فصل ۵

اعداد مختلط

۱.۵ اعداد مختلط



۱.۱.۵ نمایش مختلط

می دانیم هر نقطه در صفحهٔ مختصات دارای نمایشی بصورت $A(x,y)$ است. با رسم یک بردار. از مبدأ مختصات به نقطهٔ A، هر نقطه در صفحه قابل نمایش توسط یک بردار خواهد بود. ما این بردار را بردار $\overrightarrow{OA}$ نامیده و با $x+iy$ نشان می دهیم. این نمایش برداری در صفحهٔ مختصات را نمایش مختلط نقاط گوئیم. بدین ترتیب صفحهٔ مختصات نام صفحهٔ مختلط به خود می گیرد و نقاط صفحه را بصورت $z=x+iy$ نمایش می دهیم. مثلاً $z=۲+۳i$ که نمایش مختلط نقطهٔ $(۲,۳)$ است.برای عدد مختلط $z=x+iy$، x را مقدار حقیقی $(Re\ z)$ و y را مقدار موهومی $(Im\ z)$ عدد z گوئیم. در واقع هر

عدد مختلط مجموع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی است. در صفحهٔ مختلط، معمولاً اعداد را با حروف کوچک z,u,v,w نشان می دهیم. اکنون طول بردار $\overrightarrow{OA}$ یعنی $|z|$ را با r و زاویهٔ بردار $\overrightarrow{OA}$ را با محور x−ها با θ نشان می دهیم. بنابراین

$$r=\sqrt{x^۲+y^۲} \quad , \quad \theta=Arctg(\frac{y}{x})$$

بطور کلی هر نقطه مانند $A(x,y)$ در صفحهٔ مختصات دارای سه نمایش مختلف است.
الف) نمایش مختلط $z = x + iy$
ب) نمایش قطبی $z = re^{i\theta}$
پ) نمایش مثلثاتی $z = r(cos\theta + isin\theta)$
توجه کنید که r همیشه مثبت بوده و برای θ چهار حالت وجود دارد:

$$\begin{aligned}
x > ۰ \ , \ y > ۰ \quad &\Rightarrow \quad \theta = arctg(\frac{y}{x}) \\
x < ۰ \ , \ y > ۰ \quad &\Rightarrow \quad \theta = \pi - arctg(|\frac{y}{x}|) \\
x < ۰ \ , \ y < ۰ \quad &\Rightarrow \quad \theta = \pi + arctg(\frac{y}{x}) \\
x > ۰ \ , \ y < ۰ \quad &\Rightarrow \quad \theta = ۲\pi - arctg(|\frac{y}{x}|)
\end{aligned}$$

برای مثال نقطهٔ $B(۳,۴)$ دارای سه نمایش زیر است:
نمایش مختلط: $z = ۳ + ۴i$
نمایش قطبی:

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

و $\theta = arctg(\frac{۴}{۳})$ و لذا $z = ۵e^{i\theta}$
نمایش مثلثاتی: چون $sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{۴}{۵}$ و $cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{۳}{۵}$ پس $z = ۵(\frac{۳}{۵} + i\frac{۴}{۵})$

مثال ۱.۵ نمایشهای مختلف نقطهٔ $(-\sqrt{۳}, ۱)$ را بنویسید.
حل. از آنجا که

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{\sqrt{۳}^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۴} = ۲ \qquad , \qquad \theta = arctg(\frac{۱}{-\sqrt{۳}}) = \frac{۵\pi}{۶}$$

نمایش مختلط $z = -\sqrt{۳} + i$، نمایش قطبی $z = ۲e^{\frac{۵\pi}{۶}i}$ و نمایش مثلثاتی

$$z = ۲(cos\frac{۵\pi}{۶} + isin(\frac{۵\pi}{۶}))$$

خواهد بود.

تمرین ۱.۵ کلاسی. نمایشهای مختلف نقطهٔ $(۴, -\sqrt{۴۸})$ را بنویسید.

تعریف ۱.۵ اندازهٔ عدد مختلط z را با $|z|$ نشان می دهیم و مزدوج عدد $z = x + iy$ را بصورت $\overline{z} = x - iy$ تعریف می کنیم. همچنین تعریف می کنیم $i^۲ = -۱$.

۲.۱.۵ اعمال روی اعداد مختلط

برای جمع و تفریق دو عدد مختلط کافیست مولفه‌های حقیقی را با هم و مولفه‌های موهومی را نیز با هم جمع کنیم.

مثال ۲.۵ اگر $z = ۲ + ۴i$ و $w = -۳ + ۲i$ سپس داریم:

$$z + w = (۲ + ۴i) + (-۳ + ۲i) = -۱ + ۶i$$

$$۲z - ۵w = ۲(۲ + ۴i) - ۵(-۳ + ۲i) = ۴ + ۸i + ۱۵ - ۱۰i = ۱۹ - ۲i$$

مثال ۳.۵ اگر $z = ۲ + ۳i$ و $w = ۴ - i$ حاصل عبارات $۲\overline{z}\, w$ و $\frac{z}{w}$ را بیابید.

$$۲\overline{z}\, w = ۲(۲-۳i)(۴-i) = ۱۶-۴i-۲۴i+۶i^۲ = ۱۶-۲۸i-۶ = ۱۰-۲۸i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{۲+۳i}{۴-i} = \frac{۲+۳i}{۴-i}\times\frac{۴+i}{۴+i} = \frac{۱۱+۱۰i}{۱۷} = \frac{۱۱}{۱۷}+\frac{۱۰}{۱۷}i$$

بنابراین برای معکوس عدد مختلط $\frac{۱}{z}$ مانند مثال بالا کافیست صورت و مخرج را در مزدوج مخرج یعنی $\overline{z}$ ضرب کنیم.

تمرین ۲.۵ کلاسی. اگر $z = ۱ - ۲i$ و $w = ۲ + i$ حاصل عبارت $\frac{zw}{\overline{z}-\overline{w}}$ را بیابید.

مطلب ۱.۵ برای دو عدد مختلط z و w عبارات زیر برقرارند:

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w} \quad ,\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad , \quad z\,\overline{z} = |z|^۲ = |\overline{z}|^۲$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad , \quad |z - w| \geq ||z| - |w||$$

$$z + \overline{z} = ۲x \quad , \quad z - \overline{z} = ۲y$$

برخی عبارات متناظر نقاطی ازصفحهٔ مختلط هستند. مثلاً $|z| = ۲$ نشاندهندهٔ نقاط روی یک دایره به شعاع ۲ است زیرا $|z| = r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = ۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴$.

مثال ۴.۵ نقاطی از صفحه مشخص کنید که $Re(z^۲) = ۰$ است.

حل. می نویسیم $z^۲ = (x + iy)^۲ = x^۲ + i^۲y^۲ + ۲ixy = x^۲ - y^۲ + ۲ixy$ و بدینصورت $Rez^۲ = x^۲ - y^۲ = ۰$ خواهد بود. بالاخره $x^۲ = y^۲$ و جواب $y = \pm x$ است که نمایش نیمسازهای نواحی چهارگانه هستند.

مطلب ۲.۵ قانون دموآور در نمایش مثلثاتی عدد مختلط بصورت زیر بیان می شود:

$$(cos\theta + isin\theta)^n = cos\ n\theta + isin\ n\theta$$

۲.۵ حل معادله

برای حل یک معادلهٔ مختلط روشهای مختلفی وجود دارد که برخی ساده تر خواهند بود. چند مثال را در این زمینه در ذیل خواهیم آورد.

مثال ۵.۵ معادلهٔ درجه دوم $z^۲ - ۲z + ۵ = ۰$ را حل کنید.
حل. با روش دلتا داریم $c = ۵$, $b = -۲$, $a = ۱$ بنابراین $\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۲)^۲ - ۴(۱)(۵) = -۱۶$ و ریشه‌ها چنین خواهند بود

$$x_۱, x_۲ = \frac{-(-۲) - \sqrt{-۱۶}}{۲ \times ۱} = \frac{۲ \pm \sqrt{-۴}}{۲} = ۱ \pm ۲i$$

مثال ۶.۵ جوابهای معادلهٔ $|z| - z = ۲ + i$ را پیدا کنید.
حل. با در نظر گرفتن $z = x + iy$ و جایگذاری در معادله

$$\sqrt{x^۲ + y^۲} - x - iy = ۲ + i$$

قسمتهای حقیقی برابر $\sqrt{x^۲ + y^۲} - x = ۲$ و قسمتهای موهومی نیز برابرند $-y = ۱$ که نتیجه می دهد $y = -۱$ و $\sqrt{x^۲ + ۱} - x = ۲$ و $x = -\frac{۳}{۴}$. بنابراین $z = -\frac{۳}{۴} - i$

مثال ۷.۵ مطلوبست ریشه های $z^۳ = ۱ + i\sqrt{۳}$
حل. گیریم $z = r(cos\theta + isin\theta)$ ریشهٔ مورد نظر باشد. از طرفی صورت مثلثاتی عدد $۱ + i\sqrt{۳}$ عبارتست از $۲(cos\frac{\pi}{۶} + isin(\frac{\pi}{۶}))$. با جایگذاری دو مقدار در معادلهٔ اصلی و بکارگیری قانون دموآور چنین حاصل می شود:

$$\begin{aligned} z^۳ &= ۱ + i\sqrt{۳} \\ (r(cos\theta + isin\theta))^۳ &= ۲(cos\frac{\pi}{۶} + isin(\frac{\pi}{۶})) \\ r^۳(cos۳\theta + isin۳\theta) &= ۲(cos\frac{\pi}{۶} + isin(\frac{\pi}{۶})) \end{aligned}$$

بنابراین $r^{۳} = ۲$ یعنی $r = \sqrt[۳]{۲}$ و $۳\theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$ پس $\theta = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۸}$ که $k = ۰, ۱, ۲$.
بنابراین ریشه ها چنینند:

$$k = ۰ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۱۸} \Rightarrow z_۱ = \sqrt[۳]{۲}(cos(\frac{\pi}{۱۸}) + isin(\frac{\pi}{۱۸}))$$
$$k = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{۱۳\pi}{۱۸} \Rightarrow z_۲ = \sqrt[۳]{۲}(cos(\frac{۱۳\pi}{۱۸}) + isin(\frac{۱۳\pi}{۱۸}))$$
$$k = ۲ \Rightarrow \theta = \frac{۲۵\pi}{۱۸} \Rightarrow z_۳ = \sqrt[۳]{۲}(cos(\frac{۲۵\pi}{۱۸}) + isin(\frac{۲۵\pi}{۱۸}))$$

تمرین ۳.۵ منزل.

۱) آیا عدد $-۳i$ عددی منفی است؟ عدد $z_۱ = ۱ + ۲i$ بزرگتر است یا عدد $z_۲ = i + ۲$؟

۲) اگر $z = ۲ - ۳i$ و $w = ۱ + ۲i$ حاصل عبارات زیر را بیابید:

$$\overline{۲z - ۴w} \quad , \quad \overline{z}\, w + \overline{w}\, z \quad , \quad \frac{z+w}{z-w} \quad , \quad \frac{z-۲}{w-۱}$$

۳) همهٔ نقاط یا نواحی از صفحهٔ مختلط را بیابید که

$$۱ < |z| \leq ۳ \quad , \quad Imz > \frac{۱}{۴} \quad , \quad |\frac{z+۱}{z-۲}| \leq ۱ \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{۴}$$

۴) مطلوبست محاسبهٔ مقادیر زیر

$$\sqrt{i} \quad , \quad \sqrt[۴]{i} \quad , \quad \sqrt[۳]{-i} \quad , \quad \sqrt{۱+i} \quad , \quad \sqrt{۴+۳i} \quad , \quad \sqrt[۶]{۸}$$

۵) n را چنان بیابید که $(۱+i)^n = (۱-i)^n$

۶) ریشه های معادلات زیر را بدست آورید.
$z^۳ = \sqrt{۳} - i \quad , \quad z^۳ = i \quad , \quad z^۲ + (۱-i)z - ۴ + ۷i = ۰$

۷) معادلهٔ درجه دومی با ضرایب حقیقی تشکیل دهید که مقدار $۱+i$ یکی از ریشه های آن باشد.

۸) عدد مختلط زیر را بصورت مثلثاتی بنویسید.

$$1 + sin\alpha + icos\alpha \quad , \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$$

۹) اگر z ریشهٔ معادلهٔ $z + \frac{1}{z} = 1$ باشد مقدار $z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = 1$ را بیابید.

پروژه ۱.۵ (مختلط)
با فرض اعدادی مانند $z = x + iy$ و $w = s + it$، همهٔ موارد مذکور در مطلب۱.۵ را ثابت کنید.

پروژه ۲.۵ (سریهای سینوسی و کسینوسی)
در ذیل روند بدست آوردن سریهای سینوسی و کسینوسی را که مورد استفاده است بیان می کنیم.
(الف) فرض کنید:

$$A = sinx+sin3x+\cdots+sin(2n-1)x \quad , \quad B = cosx+cos3x+\cdots+cos(2n-1)x$$

(ب) با در نظر گرفتن عبارت $B + iA$ و بکاربستن قانون دموآور، عبارت را ساده و سپس از سری هندسی زیر استفاده کنید:

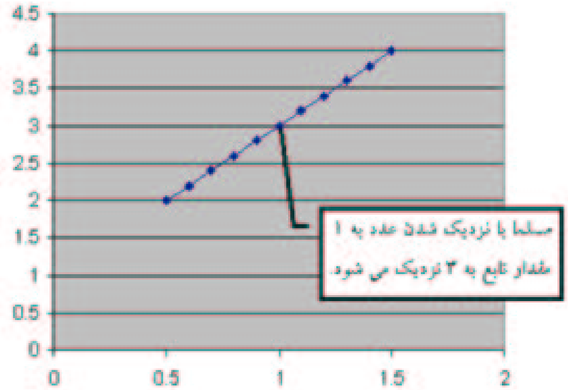
$$1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2k-2} = \frac{t^{2k} - 1}{t^2 - 1}$$

(ج) با ساده کردن عبارت و جداکردن مقادیر حقیقی و موهومی ثابت کنید

$$A = \frac{sinnx}{sinx}sinnx \quad , \quad B = \frac{sinnx}{sinx}cosnx$$

فصل ٦

حد و پیوستگی



۱.٦ مفهوم حد

مفهوم حد از مفاهیم موردنیاز در بخش حساب و دیفرانسیل است که لازم است قبل از مشتق بیان شود. بدون نیاز به تعریف دقیق ریاضی، فرض کنید می خواهیم رفتار تابع مفروضی مانند $f(x) = ۲x + ۱$ را وقتی x به $a = ۱$ نزدیک می شود را بررسی نمائیم. برای این کار، چند عدد را از همسایگی ۱ یعنی نقاط کناری آن انتخاب کرده و حاصل تابع را برای آنها بدست می آوریم. این نقاط کناری را از فاصلهٔ [۰/٦, ۱/۴] بفاصلهٔ ۰/۱ انتخاب می کنیم:

x انتخاب شده	۰/٦	۰/۷	۰/۸	۰/۹	$\boxed{1}$	۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴
$f(x)$ بدست آمده	۲/۲	۲/۴	۲/٦	۲/۸	$\boxed{3}$	۳/۲	۳/۴	۳/٦	۳/۸

با رسم نقاط در صفحه مختصات دکارتی شکل بالا حاصل می شود. در این حالت گوئیم وقتی x به سمت ۱ میل می کند، y به سمت ۳ میل خواهد کرد. این مفهوم از حد تابع، که حاصل قرار دادن نقاط دلخواهی از همسایگی نقطه در تابع است را در عمل بکار نگرفته و مستقیماً با جایگذاری عدد ۱ در تابع $f(x) = ۲x + ۱$ حد آنرا بدست می آوریم و می نویسیم $lim_{x\to ۱} ۲x + ۱ = ۳$.

مثال ۱.۶ . مثال های مختلف از حد چند تابع بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ۱/۷} ۵[x]+۲ &= ۵(۱)+۲=۷\\
\lim_{x\to \pi} sinx-۱ &= ۰-۱=-۱\\
\lim_{x\to ۱} \frac{۲x+۱}{۵x+۱} &= \frac{۲(۱)+۱}{۵(۱)+۱}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\\
\lim_{x\to ۰} \frac{۲x-sin۲x}{cosx+۲} &= \frac{۰-۰}{-۱+۲}=۰\\
\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۱}{۵-\sqrt{x+۵}} &= \frac{۳}{۲}
\end{aligned}$$

تعریف ۱.۶ اگر حد یک تابع را برای همسایگی های چپ و راست تابع بطور مجزا بدست آوریم، به آنها حدچپ $x\to a^-$ و حدراست $x\to a^+$ اطلاق می کنیم. حد یک تابع وقتی وجود دارد که حدچپ و حدراست با هم برابر باشند، یعنی

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

می خواهیم حد تابع $f(x)=\{\begin{smallmatrix} x+۱ & x\geq ۲\\ ۵-x & x<۲\end{smallmatrix}$ را وقتی x به سمت ۲ میل می کند، بیابیم. در این تابع چون همسایگی تعریف شده برای نقطهٔ $x=۲$ متفاوت است لذا بایستی یکبار از سمت راست به ۲ نزدیک شد $x\to ۲^+$ و یکبار از سمت چپ $x\to ۲^-$. بنابراین حدود تابع چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned}
(x\geq ۲ \text{ برای}) \text{ حد راست} \quad \lim_{x\to ۲^+} f(x) &= \lim_{x\to ۲^+} x+۱=۲+۱=۳\\
(x< ۲ \text{ برای}) \text{ حد چپ} \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x) &= \lim_{x\to ۲^-} ۵-x=۵-۲=۳\\
\lim_{x\to ۲} f(x) &= ۳ \quad \text{بنابراین حد تابع عبارتست از}
\end{aligned}$$

مثال ۲.۶ حد تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را وقتی x به سمت ۰ میل می کند بیابید.

حل. مانند مثال قبل دو حالت در نظر می گیریم و حدود چپ و راست را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
(x\geq ۰ \text{ برای}) \text{ حد راست} \quad \lim_{x\to ۰^+} f(x) &= \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{x}=۱\\
(x< ۰ \text{ برای}) \text{ حد چپ} \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) &= \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x}=-۱
\end{aligned}$$

لذا حد تابع در $x=۰$ وجود ندارد.

مثال ۳.٦ حد تابع $f(x)=\frac{[x]-۵}{[x^۲-۱]-۱}$ را وقتی x به سمت ۱ میل می کند بیابید.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]-۵}{[x^۲-۱]-۱} = \frac{۱-۵}{۰-۱} = ۴$$ حد راست (برای $x > ۱$)

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{[x]-۵}{[x^۲-۱]-۱} = \frac{۰-۵}{-۱-۱} = \frac{۵}{۲}$$ حد چپ (برای $x < ۱$)

پس حد تابع در $x=۱$ وجود ندارد.

۱.۱.٦ صور مبهم و قوانین گرفتن حدود

بعد از بیان مثالهای سادهٔ فوق، که برای گرفتن حد $x\to a$ مقدار a را در تابع قرار می دهیم، مسائل دیگری نیز وجود دارد. به حدود زیر را توجه کنید:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۲-۴} = \frac{۲-۲}{۴-۴} = \frac{۰}{۰} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^۲-۴} - x = \infty - \infty$$

می بینید که با جایگذاری، مقادیر حدود بدست نمی آید. در این چنین مواردی، که مقدار حد برابر $\frac{۰}{۰}$ یا $\infty - \infty$ است، حد **مبهم** بوده و برای بدست آوردن آن قواعدی را بکار می‌بریم که در ذیل بیان خواهیم نمود. موارد مبهم که **صور مبهم** نامیده می شوند عبارتند از $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty\times ۰$ و $\infty-\infty$ و $\frac{۰}{۰}$.

۲.۱.٦ استفاده از اتحادها برای رفع ابهام

با بکاربردن اتحادها و تجزیهٔ صورت و مخرج و در برخی موارد با ضرب صورت و مخرج در مزدوجها براحتی حدود رفع ابهام می شوند. به چند مثال توجه کنید:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۲-۴} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x+۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳-۱}{x^۲-۱} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲+x+۱}{x+۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)^۲}{x-۲} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{۱} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۵x+٦}{x^۲+۳x-۱۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x+۵)} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۳}{x+۵} = \frac{-۱}{۷}$$

در حالت خاص اگر تابع کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای باشد، وقتی که $x\to a$ کافیست با تقسیم هرکدام از صورت و مخرج بر عامل ابهام $x-a$ آنها را تجزیه کنیم.

مثال ۴.۶ مطلوبست محاسبهٔ حد زیر

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-8x^2-9}{x^3-4x^2+5x-6}$$

حل. از آنجا که $lim_{x\to 3}\frac{x^4-8x^2-9}{x^3-4x^2+5x-6} = \frac{81-72-9}{27-36+15-6} = \frac{0}{0}$ این حد نیز مبهم بوده و برای رفع ابهام از آن صورت و مخرج را جداگانه بر عامل ابهام $x-3$ تقسیم می کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-8x^2-9}{x^3-4x^2+5x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3+3x^2+x+3)}{(x-3)(x^2-x+2)} = \frac{60}{8}$$

تمرین ۱.۶ کلاسی. مطلوبست حد زیر

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^3-x^2-x-2}$$

توجه داشته باشید که حد یک تابع همیشه یکتاست و از هر روشی که حد را بدست آوریم، جواب نهائی یکی خواهد بود. در محاسبهٔ برخی حدود می توان از اتحاد زیر بهره برد:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+x^2a^{n-3}+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

مثال ۵.۶ مطلوبست حد $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27}$

حل. با استفاده از اتحاد بالا داریم

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3+x^2 3+x3^2+3^3)}{(x-3)(x^2+x3+3^2)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^3+3x^2+9x+27}{x^2+3x+9} = 4$$

هرچند روشهای مذکور فوق، در اغلب موارد ساده ترند، ولی در محاسبهٔ حدود رادیکالی در برخی موارد می توان با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت، حد را محاسبه نمود. برای حدودی که صورت و مخرج آنها رادیکالی هستند، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ٦.٦ محاسبهٔ حد $lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲} &= \lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}\\ &= \lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)-۴}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}\\ &= \lim_{x\to ۲}\frac{۱}{\sqrt{x+۲}+۲}\\ &= \frac{۱}{۴}\end{aligned}$$

تمرین ۲.٦ کلاسی. محاسبهٔ حد زیر

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{x}-۱}{x-۴}$$

تمرین ۳.٦ منزل. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{-۲[x]+٦}{x-۱}\quad,\quad (b)\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{[x]+۳}{۱-[x]}\quad,\quad (c)\ \lim_{x\to -۲^-}\frac{۲x}{-x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to -۱^+}\frac{x+۱}{x^۲-۱}\quad,\quad (e)\ \lim_{x\to ۲}\frac{[x^۲]-۱}{[x]^۲-۱}\quad,\quad (f)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۲-\sqrt{۴-x}}{x}$$

$$(g)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۱۰}-۱}{x^۸-۱}\quad,\quad (h)\ \lim_{t\to -۲}\frac{t+۲}{t^۳+۸}\quad,\quad (i)\ \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$$

$$(j)\ \lim_{x\to ۲}\sqrt{\frac{x-۲}{x^۲-۴}}\quad,\quad (k)\ \lim_{x\to -۲}\frac{x^۳-x^۲+x+۱۴}{x^۴+۳x^۳+۸}$$

$$(l)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۵-x^۴-۴x^۲-x+۲}{x^۴-۲x^۳+x^۲-۴}\quad,\quad (m)\ \lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۳+x+۳}{x^۳+۲x^۲+٦x+۵}$$

$$(n)\ \lim_{x\to ۳}\frac{۲x^۳-۵x^۲-۲x-۳}{۴x^۳-۱۳x^۲+۴x-۳}\quad,\quad (o)\ \lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۸x-۱٦}{۲x^۲-۹x+۴}$$

$$(p)\ \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲\sqrt{x}+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x}-۱}\quad,\quad (q)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^m-۱}{x^n-۱}\quad (m,n>۰)$$

۳.۱.٦ حد در بینهایت $x \to \infty$

حد در بی‌نهایت با نماد $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ یا $x \to \infty$ مشخص می شود. این مفهوم از حد، کمی متفاوت از حدود قبلی است، در اینجا چون متغیر عددی است بزرگ، بنابراین اعداد در مقایسه با آنها ناچیز شمرده شده و قابل صرفنظر خواهند بود. برای مثال اگر بخواهیم حد $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲+۱}-x$ را حساب کنیم. از آنجا که عدد ۱ در برابر متغیر $x^۲$ ناچیز است، پس قابل صرفنظر خواهد بود و می توانیم بجای $x^۲+۱$ عبارت $x^۲$ را قرار دهیم و بنویسیم:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲+۱}-x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲}-x = \lim_{x\to+\infty} |x|-x = ٠$$

در حالت $x \to -\infty$ چنین باید نوشت:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^۲+۱}-x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^۲}-x = \lim_{x\to-\infty} |x|-x = \lim_{x\to-\infty} -x-x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -۲x = +\infty$$

مثال ۷.٦ مقدار حد $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲+۴}-x-۱$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲+۴}-x-۱ &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲}-x-۱ \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} |x|-x-۱ \\
\text{اعداد مثبت} &= \lim_{x\to+\infty} x-x-۱ = -۱ \\
\text{اعداد منفی} &= \lim_{x\to-\infty} -x-x-۱ = \lim_{x\to-\infty} -۲x-۱ = +\infty
\end{aligned}$$

مثال ۸.٦ مطلوبست حد $lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲+۴x-۳}+x$

حل. در این حالت زیر رادیکال را مربع کامل می کنیم. برای این کار می توانید از اتحاد زیر استفاده کنید :

$$ax^۲+bx+c = a(x+\frac{b}{۲a})^۲ + \frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

لذا وقتی $x \to \pm\infty$ همیشه داریم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} = \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

و جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^{۲}+۴x-۳}+x &= \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{۱}\,|x+\frac{۴}{۲(۱)}|+x\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}|x+۲|+x\\ +\infty\text{برای} &= \lim_{x\to+\infty}x+۲+x=\lim_{x\to+\infty}۲x+۲=+\infty\\ -\infty\text{برای} &= \lim_{x\to-\infty}-(x+۲)+x=-۲\end{aligned}$$

تمرین ۴.٦ کلاسی. مقدار حد $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}+x-۲$ را حساب کنید.

مطلب ۱.٦ برای ریشه‌های بالاتر وقتی $x\to\pm\infty$ فرمول زیر را بکار می بریم.

$$\sqrt[n]{ax^{n}\pm bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\cdots}=\sqrt[n]{a}|x\pm\frac{b}{na}|$$

برای حدودی که صورت و مخرج آنها چندجمله ای هستند، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۹.٦ مطلوبست حد زیر

$$lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۳}-۲x+۱}{۴x^{۴}-۹x^{۳}+۸}$$

حل. با فاکتورگیری از بزرگترین توان صورت و مخرج داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۳}-۲x+۱}{۴x^{۴}-۹x^{۳}+۸}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}(۳-\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۳}})}{x^{۴}(۴-\frac{۹}{x}+\frac{۸}{x^{۴}})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۳}}{۴x^{۴}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{۴x}=\frac{۳}{۴(\pm\infty)}=۰$$

بنابراین در این نوع حدود بزرگترین توان همیشه اعمال می شود.

مطلب ۲.٦ در حالت کلی برای حدود با صورت و مخرج چندجمله‌ای، با در نظر گرفتن بزرگترین درجهٔ صورت و مخرج داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۰}{b_mx^{m}+b_{m-۱}x^{m-۱}+\ldots+b_۰} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^{n}}{b_mx^{m}}\\ n>m\text{برای} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^{n-m}}{b_m}=(\pm)\infty\\ n=m\text{برای} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}=\frac{a_n}{b_m}\\ n<m\text{برای} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_mx^{m-n}}=۰\end{aligned}$$

مطلب ۳.۶ در برخی حالات خاص، با جانشینی متغیر $\frac{1}{t}$ بجای x که در آن $t \to 0$ می توان حدود بی نهایت را ساده تر نمود.

تمرین ۵.۶ منزل. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5x+1}{\sqrt{x^4}+8} \quad , \quad (b) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-8x+1}-\sqrt{x^2+8x-1}$$

$$(c) \quad \lim_{x\to\pm\infty} 1-x-\sqrt[4]{x^4+4x^3+2x-8} \quad , \quad (d) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}-x+2}$$

$$(e) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-x} \quad , \quad (f) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[4]{16x^4-8x^3+x-1}+3-2x$$

$$(g) \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4\sqrt{x^4-2x^3+1}+6x}+2x \quad , \quad (h) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6}-1}{1-2x^3}$$

$$(i) \quad \lim_{x\to\pm\infty} x-2+\sqrt{x^2-8x+4} \quad , \quad (j) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-9x}-\sqrt{x^2+9x}$$

۴.۱.۶ حدود توابع مثلثاتی

برای حدود توابع مثلثاتی، وقتی $x \to 0$ می توان از دو حد زیر بهره برد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{sinx} = 1$$

در اکثر موارد وقتی $x \to 0$ می توان از هم ارزی های زیر استفاده کرد:

$$sin\ ax \equiv ax \quad , \quad cos\ ax \equiv 1-\frac{a^2x^2}{2} \quad , \quad tg\ ax \equiv ax$$

مثال ۱۰.۶ مطلوبست

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x-2x}{tg2x+x}$$

حل. مطابق قوانین هم ارزی بالا می نویسیم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x-2x}{tg2x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x)-2x}{(2x)+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۱.٦ مطلوبست

$$\lim_{x\to ۰} \frac{sin^۲ x}{۱ - cos\ x}$$

حل.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{sin^۲ x}{۱ - cos\ x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - cos^۲ x}{۱ - cos\ x} = \lim_{x\to ۰} \frac{(۱ - cosx)(۱ + cosx)}{۱ - cosx}$$

$$= \lim_{x\to ۰} (۱ + cosx) = ۲$$

مثال ۱۲.٦ مطلوبست حد زیر

$$\lim_{x\to ۱} (۱ - x) tg(\frac{\pi x}{۲})$$

حل. از آنجا که $tg\alpha = cotg(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ با جایگذاری

$$\lim_{x\to ۱} (۱ - x) cotg(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi x}{۲}) = \lim_{x\to ۱} (۱ - x) cotg(\frac{\pi}{۲}(۱ - x))$$

با تغییر متغیر $t = ۱ - x$ از آنجاکه $x \to ۱$ پس $t \to ۰$ و بدین ترتیب

$$\lim_{x\to ۱} (۱ - x) cotg(\frac{\pi}{۲}(۱ - x)) = \lim_{t\to ۰} t\ cotg(\frac{\pi}{۲} t) = \lim_{t\to ۰} t \frac{cos(\frac{\pi}{۲} t)}{sin(\frac{\pi}{۲} t)}$$

$$= \lim_{t\to ۰} t \frac{cos(\frac{\pi}{۲} t)}{\frac{\pi}{۲} t} = \frac{۱}{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲}{\pi}$$

تمرین ٦.٦ منزل. حدود مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - cos\ x}{sin\ x} \quad , \quad (b)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{x^۲\ sin^۲ x}{۱ - cos\ ۲x} \quad , \quad (c)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - sin\ x}{\frac{\pi}{۲} - x}$$

$$(d)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{۲x^۲ - ۳x}{۳sin^۲ x} \quad , \quad (e)\quad \lim_{x\to \pi} \frac{sin^۲ x}{۱ + cos^۳ x} \quad , \quad (f)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{sin^۳ x}{cosx - cos^۲ x}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{sin^۲ x}{۱ - cos^۳ x} \quad , \quad (h)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{sin^۴ x}{۱ - cos^۵ x} \quad , \quad (i)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{sin^k x}{۱ - cos^{k+۱} x}$$

۲.۶ پیوستگی

پیوستگی یک تابع در نقطه‌ای مثل a به این صورت بیان می شود که می بایست حد چپ تابع با حد راست تابع در a برابر بوده و این مقدار برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال ۱۳.۶ پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه $x = ۱$ را بررسی کنید.
حل. برای حدچپ و راست تابع در $x = ۱$ داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = ۲$$

اما $f(۱)$ وجود ندارد. بنابراین تابع در $x = ۱$ پیوسته نیست.

مثال ۱۴.۶ پیوستگی تابع $f(x) = ۳x + |x - ۳|$ را در $x = ۳$ بررسی کنید.
حل. در نقطهٔ $x = ۳$ حد چپ و حد راست تابع چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{llcl} x \geq ۳ \text{ حد راست برای} & \lim_{x\to ۳^+} f(x) & = & \lim_{x\to ۳^+} ۳x + (x - ۳) = ۹ \\ x < ۳ \text{ حد چپ برای} & \lim_{x\to ۳^-} f(x) & = & \lim_{x\to ۳^-} ۳x - (x - ۳) = ۹ \end{array}$$

و با توجه به اینکه $f(۳) = ۹$ لذا تابع در $x = ۳$ پیوسته است.

مثال ۱۵.۶ مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۴}{x-۲} & ,x > ۲ \text{ اگر} \\ a + ۲x & ,x \leq ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

حل.

$$\begin{array}{llcl} x > ۲ \text{ حد راست برای} & \lim_{x\to ۲^+} f(x) & = & \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = ۴ \\ x \leq ۲ \text{ حد چپ برای} & \lim_{x\to ۲^-} f(x) & = & \lim_{x\to ۲^-} a + ۲x = a + ۴ \end{array}$$

برای پیوسته بودن تابع در $x = ۲$ می بایست شرط پیوستگی برقرار باشد یعنی

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \implies ۴ = a + ۴ = a + ۴ \implies a = ۰$$

تمرین ۷.٦ کلاسی. مقادیرa و b را بیابید چنانکه تابع زیر در$x=-۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+a & , \quad x>-۱ \text{ اگر} \\ bx+۲ & , \quad x=-۱ \text{ اگر} \\ ax+b & , \quad x<-۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

مطلب ۴.٦ در مثال ۱۷.۷ ثابت خواهیم کرد که

$$\lim_{y\to\infty}(۱+\frac{۱}{y})^y=e \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n=e$$

که در آنها e عدد نپر بوده و n عدد صحیح می باشد. با استفاده از این دو فرمول برخی از حدود را می توان محاسبه نمود.

مثال ۱٦.٦ حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+۱}{x-۱})^{۲x-۳}$$

حل. از آنجا که شکل حد بایستی بصورت بالا دربیاید، لذا با فرض

$$\frac{x+۱}{x-۱}=۱+\frac{۱}{y}$$

داریم $x=۲y+۱$ و با جایگذاری در حد داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+۱}{x-۱})^{۲x-۳}=\lim_{y\to\infty}(۱+\frac{۱}{y})^{۲(۲y+۱)-۳}$$

$$=\lim_{y\to\infty}(۱+\frac{۱}{y})^{۴y}\lim_{y\to\infty}(۱+\frac{۱}{y})^{-۱}=e^{۴}.۱=e^{۴}$$

۱.۲.٦ قضیهٔ مقدار میانی

اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\neq f(b)$ آنگاه بازای هر عدد k بین $f(a)$ و $f(b)$ عددی مانند $c\in[a,b]$ هست که $f(c)=k$.

مثال ۱۷.٦ ثابت کنید تابع $fx)=x^{۳}-۳x+۱$ یک ریشه بین ۲ و ۲− دارد.
حل. چون $f(۲)=۳>۰$ و $f(-۲)=-۱<۰$ طبق قضیهٔ مقدار میانی عددی مانند c هست که $f(c)=۰$.

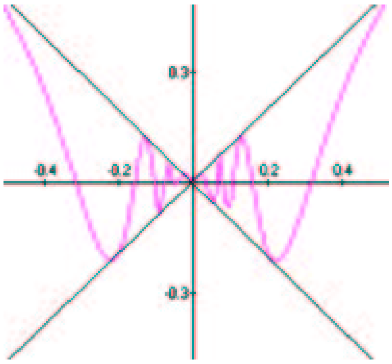
۲.۲.۶ قضیهٔ فشردگی (ساندویچ)

اگر برای سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ که $f(x) \le g(x) \le h(x)$ داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ بنابراین $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

مثال ۱۸.۶ ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0} x sin\frac{1}{x}$$

حل. از آنجا که $-1 \le sin\alpha \le 1$ پس $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$ با ضرب طرفین در x داریم



$$-x \le x\ sin\frac{1}{x} \le x$$

با گرفتن حد از طرفین

$$\lim_{x\to 0} -x \le \lim_{x\to 0} x\ sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x$$

و طبق قضیهٔ فشردگی $\lim_{x\to 0} x\ sin\frac{1}{x} = 0$.

۳.۲.۶ مجانب افقی و قائم و مایل

مجانب یک منحنی **خطی** است که در کنار منحنی قرار گرفته و منحنی در همسایگی آن به بی نهایت می رود. در حالت کلی سه نوع مجانب داریم:
مجانب افقی: خط $y = b$ را مجانب افقی تابع $y = f(x)$ گوئیم اگر

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

مجانب قائم: خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $y = f(x)$ گوئیم اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

در اغلب موارد کافیست برای بدست آوردن مجانب قائم، مخرج را برابر صفر قراردهیم.

مجانب مایل: خط $y = mx + h$ را مجانب مایل تابع $y = f(x)$ گوئیم اگر مقدار

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} \neq 0$$

موجود و مخالف صفر باشد. در اینصورت مقدار h را از فرمول زیر بدست می آوریم:

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} y - mx$$

مثال ۱۹.٦ مجانبهای تابع

$$y = \frac{3x - 1}{9 - x^2}$$

حل. با صفر قرار دادن مخرج برای مجانبهای قائم $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ و چون

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x - 1}{9 - x^2} = 0$$

پس $y = 0$ مجانب افقی منحنی است. چون

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x - 1}{9x - x^3} = 0$$

لذا منحنی مجانب مایل ندارد.

مثال ۲۰.٦ مجانبهای تابع زیر را بدست آورید.

$$y = \frac{3x^2 - 1}{x - 4}$$

حل. با صفر قرار دادن مخرج مجانب قائم $x = 4$ بدست می آید و از آنجا که

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x - 4} = \pm\infty$$

پس تابع مجانب افقی ندارد. چون

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 4x} = 3 \neq 0$$

لذا منحنی مجانب مایل با شیب $m = 3$ داشته و برای عرض از مبداء داریم:

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} y - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x - 1}{x - 4} = 12$$

و خط $y = 3x + 12$ مجانب مایل منحنی خواهد بود.

مطلب ۵.۶ دربرخی مسائل با تقسیم صورت برمخرج مجانب مایل بدست می آید.

تمرین ۸.۶ کلاسی. مجانبهای تابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$$

تمرین ۹.۶ منزل.

۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

$(a)\quad \lim_{x\to\infty} x\, sin\frac{1}{x}$

$(b)\quad \lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$

$(c)\quad \lim_{t\to 1} \frac{cos\frac{\pi t}{2}}{1-t}$

$(d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{sin(cosx)}{cos(sinx)}$

$(e)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{sin2x}{5x^2-7x}$

$(f)\quad \lim_{x\to 0} sin(tg2x)\, sinx$

$(g)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

$(h)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$(i)\quad \lim_{x\to 1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})$

$(j)\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$(k)\quad \lim_{x\to 0} sinx\, sin\frac{1}{x}$

$(l)\quad \lim_{x\to\infty}(\frac{x+5}{x+2})^{4x+3}$

$(m)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}cosx-1}{1-tg^2x}$

$(n)\quad \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$(o)\quad \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{[x]}\, x}{sinx}$

$(p)\quad \lim_{x\to\infty}(\frac{5x+1}{5x-3})^{2x-1}$

$(q)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$(r)\quad \lim_{x\to 0} x^3\, sin\frac{1}{\sqrt{x}}$

۲) مطلوبست تعیین پیوستگی تابع زیر در $x = 4$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-10 & , \quad x>4 \text{ اگر} \\ 6 & , \quad x=4 \text{ اگر} \\ 10-2x^3 & , \quad x<4 \text{ اگر} \end{cases}$$

۳) مطلوبست تعیین پیوستگی تابع زیر در $x = ۲$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} & , \quad x > ۲ \text{اگر} \\ -۱ & , \quad x = ۲ \text{اگر} \\ -۲ + ۳x & , \quad x < ۲ \text{اگر} \end{cases}$$

۴) اگر $f(x) = \{^{۲x+a \quad x \geq ۲}_{۵-ax \quad x<۲}$ مقدار a را چنان پیدا کنید که

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x)$$

۵) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در نقاط $x = ۲, -۳$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , \quad x \leq -۳ \text{اگر} \\ ۲x - a & , \quad -۳ < x < ۲ \text{اگر} \\ ۳ - ۲b - ۳x^۲ & , \quad x \geq ۲ \text{اگر} \end{cases}$$

٦) حد تابع $f(x) = (x^۲ + ۱)sgn(x - ۱)$ را در $x = ۱$ بدست آورید.

۷) آیا تابع $g(x) = [x - ۱] - ۲[۲x] + ۱$ در $x = \frac{۱}{۲}$ حد دارد؟

۸) پیوستگی تابع $f(x) = ۲[x] + |۱ - x|$ را در نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ بررسی کنید.

۹) پیوستگی تابع زیر را در $x = ۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{x} - ۱} & , \quad x \geq ۲ \text{اگر} \\ \sqrt{x} + ۱ & , \quad x < ۲ \text{اگر} \end{cases}$$

۱۰) مطلوبست مقدار a چنانکه تابع زیر در $x = ۴$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ax - ۳a & , \quad x > ۴ \text{اگر} \\ a + ۱٦ & , \quad x = ۴ \text{اگر} \\ ۸ + ۲x + a & , \quad x < ۴ \text{اگر} \end{cases}$$

۱۱) ثابت کنید تابع $f(x) = x^۴ - ۲x - ۱۳$ یک ریشه بین ۲ و ۲− دارد.

۱۲) ثابت کنید تابع $f(x) = sin۵x + ۴cos۳x - ۱$ یک ریشه در $[۰, \pi]$ دارد.

۱۳) ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[۲x]+\cdots+[nx]}{n^۲}=\frac{x}{۲}$$

{ راهنمائی: طبق فرمول $k-۱<[k]\leq k$ کسر را ساده کرده و سپس فشردگی را بکار ببرید.}

۱۴) مجانبهای توابع زیر را بیابید

$$(a)\ \ y=\frac{x}{x^۳-۱}\qquad (b)\ \ y=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۹}$$
$$(c)\ \ y=\frac{x^۴-۱۶}{x^۳+۸}\qquad (d)\ \ y=\frac{sinx}{x-cosx}$$

۱۵) اگر α عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}\quad ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ln\ x}{x^\alpha}$$

۱۶) ثابت کنید

$$\lim_{n\to+\infty}nsin(۲\pi en!)=۲\pi$$

فصل ۷

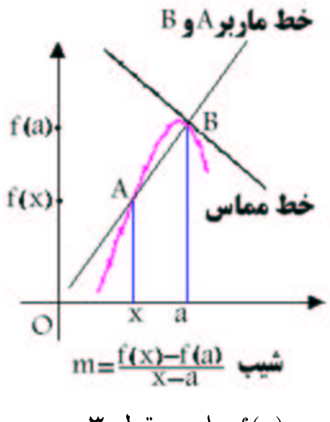
مشتق و کاربردهای آن

۱.۷ تعاریف

مشتق یک تابع در نقطه ای مانند $x = a$ را بصورت $f'(a)$ نشان داده و به یکی از دو شکل زیر **تعریف** می شود:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (۱) \quad , \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (۲)$$

چنین تعریفی از مشتق، وابسته به وجود حد است اعم از اینکه حد متناهی یا نامتناهی باشد. در حالتیکه این مقدار متناهی باشد گوئیم تابع در آن **نقطه مشتق پذیر** است. تابعی که در تمام دامنه‌اش مشتق داشته باشد را **تابع مشتق‌پذیر** گوئیم. بطور کلی مفهوم هندسی مشتق یک تابع در یک نقطه عبارتست از شیب خط مماسی که از آن نقطه بر نمودار آن تابع رسم می شود. بنابراین آنچه در (۱) و (۲) بیان شده با روش هندسی کاملاً قابل توجیه است.



مثال ۱.۷ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x + ۱}$ را در نقطه $x = ۳$ بدست آورید.

حل. با استفاده از تعریف (۱) می نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} &= \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{(x+۱)-۴}{(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{\sqrt{x+۱}+۲} = \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

مثال ۲.۷ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را بدست آورید.

حل. با استفاده از تعریف (۲) می نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{۱}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \end{aligned}$$

تمرین ۱.۷ کلاسی. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^۳+۱$ را در نقطه $x=۲$ بدست آورید.

گفتیم مشتق یک تابع وابسته به وجود حد است که می تواند متناهی یا نامتناهی باشد و در حالتی که این مقدار متناهی باشد تابع در آن نقطه مشتقپذیر است. وقتی مشتق نامتناهی است تابع در آن نقطه مشتق دارد و شیب خط مماس در آن نقطه برابر $\pm\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. از طرفی چون مشتق تابع بصورت حد تعریف می شود، بنابراین می توان حد چپ و راست را برای مشتق بصورت زیر تعریف نموده که آنها را مشتق چپ (f'_-) و مشتق راست (f'_+) می نامیم:

$$f'_+(a) = lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a) = lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مطابق وجودحد، چونکه حد تابع وقتی موجود است که حد چپ و راست موجود و برابر باشند، مشتق یک تابع نیز وقتی وجود دارد که مشتق چپ f'_- و مشتق راست f'_+ موجود بوده و با هم برابر باشند. بنابراین در حالت کلی:

مطلب ۱.۷ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ مشتقپذیر است اگر در $x=a$ پیوسته بوده و $f'_+(a)=f'_-(a)$. بالعکس اگر $f(x)$ در $x=a$ مشتقپذیر باشد در نتیجه پیوسته است.

در حالاتی که $f'_-(a)=\infty$ یا $f'_+(a)=\infty$ گوئیم تابع در $x=a$ مشتقپذیر نیست در این حالت تابع دارای مماس چپ و راست است. در حالتی که مشتق چپ و راست موجود و متناهی باشند ولی مساوی نباشند گوئیم تابع در آن نقطه گوشه دارد. در صورتیکه مشتق چپ و راست نامتناهی و نامساوی باشند گوئیم آن نقطه، **نقطهٔ بازگشت** تابع است.

مثال ۳.۷ مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\{\begin{smallmatrix} x^۲+۲ & , & x<۱ \\ ۲x+۱ & , & x\geq ۱\end{smallmatrix}$ را در $x=۱$ بدست آورید.

حل. ابتدا مطابق مطلب ۱.۷ بررسی می کنیم که این تابع در $x=۱$ پیوسته است. برای مشتق چپ و راست:

$$\begin{aligned}
f'_-(۱)=lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} &= lim_{x\to ۱^-}\frac{(x^۲+۲)-۳}{x-۱}\\
&= lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{x-۱}\\
&= lim_{x\to ۱^-}\ x+۱\\
&= ۲\\
f'_+(۱)=lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} &= lim_{x\to ۱^+}\frac{(۲x+۱)-۳}{x-۱}\\
&= lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x-۲}{x-۱}\\
&= lim_{x\to ۱^+}\frac{۲(x-۱)}{x-۱}\\
&= ۲
\end{aligned}$$

تساوی این دو نتیجه می دهد که تابع مشتق پذیر بوده و $f'(۱)=۲$.

تمرین ۲.۷ کلاسی. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\{\begin{smallmatrix} x^۲-۲a & , & x<۱ \\ ax+b & , & x\geq ۱\end{smallmatrix}$ در $x=۱$ مشتقپذیر باشد.

از تعریف مشتق می توان مشتق توابع مختلفی را محاسبه نمود و سپس از آنها بهره برد. در واقع ما تنها در موارد خاصی از تعریف مشتق استفاده می کنیم.

مطلب ۲.۷ برای توابع مختلف مشتق را محاسبه نموده و طبق جدول زیر داریم:

$$c \text{ ثابت } \implies 0 \tag{1}$$

$$(r \text{ حقیقی}) \quad x^r \implies rx^{r-1} \tag{2}$$

$$(u \text{ تابع دلخواه}) \quad u^r \implies ru'u^{r-1} \tag{3}$$

$$\sqrt{x} \implies \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{x^m} \implies \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \tag{5}$$

$$(u \text{ تابع دلخواه}) \quad \sqrt[n]{u^m} \implies \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}} \tag{6}$$

مشتق خطی است یعنی $[af(x) \pm bg(x)]' = af'(x) \pm bg'(x)$ بنابراین با استفاده از تعاریف مشتق در بالا می توان مشتق توابع مختلف را محاسبه نمود. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$[7x^6 - 5x^4 - 3x + 4]' = 7[x^6]' - 5[x^4]' - 3[x]' + 0$$
$$= 7 \times 6x^5 - 5 \times 4x^3 - 3 = 42x^5 - 20x^3 - 3$$

$$[10x^{10} - 5x^7 + 8x - 2]' = 100x^9 - 35x^6 + 8$$

$$[x^{2/4} + (2x^4 - 5x)^{13}]' = 2/4x^{1/4} + 13(8x^3 - 5)(2x^4 - 5x)^{12}$$

$$[x^7 + (x^3 + 5x - 3)^8]' = 7x^6 + 8(3x^2 + 5)(x^3 + 5x - 3)^7$$

$$[(x^8 + 2x^3 + 5x^2)^3 + (x^7 - 7x)^{10}]'$$
$$= 3(8x^7 + 6x^2 + 10x)(x^8 + 2x^3 + 5x^2)^2 + 10(7x^6 - 7)(x^7 - 7x)^9$$

$$[\sqrt[25]{x^3} - \sqrt[8]{(x^2 - x)^3}]' = \frac{3}{25\sqrt[25]{x^{22}}} - \frac{3(2x-1)}{8\sqrt[8]{(x^2-x)^5}}$$

تمرین ۳.۷ کلاسی. مشتق تابع زیر را در $x = 4$ بیابید.

$$4\sqrt{x} - \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 8\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

مطلب ۳.۷ برای توابع مثلثاتی، مشتق طبق جدول زیر است:

$$\sin u \implies u'\cos u \tag{7}$$

$$\cos u \implies -u'\sin u \tag{8}$$

$$tg\, u \implies u'(1 + tg^2 u) \tag{9}$$

$$cotg\, u \implies -u'(1 + cotg^2 u) \tag{10}$$

مثالهای زیر را ببینید:

$[sin۳x+۴cos۲x]'=۳cos۳x-۸sin۲x$

$[۵tg۳x-۴cotg۲x]'=۱۵(۱+tg^{۲}۳x)+۸(۱+cotg^{۲}۲x)$

$[sin(x^{۲}+۱)+۵cos(x^{۳}-۴x)]'=۲xcos(x^{۲}+۱)-۵(۳x^{۲}-۴)sin(x^{۳}-۴x)$

$[cotg(x^{۴}-۳x^{۳}+۵x)]'=-(۴x^{۳}-۹x+۵)(۱+cotg^{۲}(x^{۴}-۳x^{۳}+۵x))$

$[tg^{۴}x]'=۴(۱+tg^{۲}x)tg^{۳}x$

$[\sqrt{sinx+cosx}]'=\frac{cosx-sinx}{۲\sqrt{sinx+cosx}}$

تمرین ۴.۷ منزل.

۱) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ را در $x=۴$ بدست آورید.

۲) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^{۳}+x+۱$ را بدست آورید.

۳) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=sinx$ را بدست آورید.

۴) مشتق تابع $f(x)=|x|$ را در نقطه $x=۰$ بیابید.

۵) مشتق تابع زیر را در $x=۰$ بیابید

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}sin\frac{۱}{x} & , \quad \text{اگر}\ x\neq ۰ \\ ۰ & , \quad \text{اگر}\ x=۰ \end{cases}$$

۶) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$(a)\ y=۲x-\frac{۳}{x^{۵}}+\frac{۱}{x^{۷}} \quad , \quad (b)\ y=(۲x^{۳}-۶x)^{۴} \quad , \quad (c)\ y=(۴x^{۶}-۲x)^{۲۳}$$

$$(d)\ y=(۳x^{۲}+۱)(x-۲) \quad , \quad (e)\ \frac{۲}{x^{۵}}-\frac{x}{\sqrt{x}}+۲\frac{\sqrt{x^{۳}}}{\sqrt[۴]{x^{۵}}} \quad , \quad (f)\ sinx+cosx$$

$$(g)\ y=\sqrt{tg۳x} \quad , \quad (h)\ y=\sqrt{sin۴x+cos۴x} \quad , \quad (i)\ \sqrt[۴]{(tgx+cotgx)^{۳}}$$

$$(j)\ y=\frac{۲x^{۳}+۴x^{۲}-۵x-۱}{x^{۴}}+\frac{۶}{x^{۹}}-\frac{\sqrt{x^{۵}}}{x^{۳}} \quad , \quad (k)\ y=\sqrt[۳]{۳x^{۲}-۵x+۱}$$

۷) مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را به ازای $x=۰$ بیابید.

۱.۱.۷ قوانین مشتقگیری

چنانکه در مطلب ۲.۷ گفته شد مشتق مجموع توابع برابر مجموع مشتقهای آنهاست ولی برای ضرب یا خارج قسمت دو تابع چنین فرمولی صحیح نیست. بدین منظور برای اعمال مشتق ضرب و تقسیم توابع، قوانین زیر بکار می روند.

(۱۱) مشتق حاصلضرب دو تابع $uv \Rightarrow u'v+v'u$

(۱۲) مشتق حاصلضرب سه تابع $uvw \Rightarrow u'vw+v'uw+w'uv$

(۱۳) مشتق خارج‌قسمت دو تابع $\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u'v-v'u}{v^{2}}$

که u و v و w توابعی دلخواهند. مثالهای مختلف از فرمولهای مذکور فوق چنین است.

مثال ۴.۷ مشتق توابع زیر

(الف) تابع $y=(x^{3}+2x-4)(5x^{2}+7x)$

$$y'=(3x^{2}+2)(5x^{2}+7x)+(10x+7)(x^{3}+2x-4)$$

(ب) تابع $y=(x^{4}+2)(x^{3}-9x+2)^{6}$

$$y'=(4x^{3})(x^{3}-9x+2)^{6}+6(3x^{2}-9)(x^{3}-9x+2)^{5}(x^{4}+2)$$

(ج) مشتق تابع $y=(x^{2}+x)(x-4)(x^{4}+1)$

$$y'=(2x+1)(x-4)(x^{4}+1)+(x^{2}+x)(1)(x^{4}+1)+(x^{2}+x)(x-4)4x^{3}$$

(د) تابع $y=\frac{3x^{4}-5x+2}{x^{3}-1}$

$$y'=\frac{(12x^{3}-5)(x^{3}-1)-(3x^{2})(3x^{4}-5x+2)}{(x^{3}-1)^{2}}$$

مثال ۵.۷ مشتق تابع زیر رابیابید.

$$y=\frac{\sqrt{x}+6x}{(x^{5}+65)^{3}}$$

حل. با استفاده از فرمول مشتق تابع خارج قسمت و مشتق رادیکال داریم:

$$y'=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}+6)(x^{5}+65)^{3}-3(5x^{4})(x^{5}+65)^{2}(\sqrt{x}+6x)}{(x^{5}+65)^{6}}$$

$$= \frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} + ۶)(x^۵ + ۶۵) - ۱۵x^۴(\sqrt{x} + ۶x)}{(x^۵ + ۶۵)^۴}$$

مثال ۶.۷ مشتق تابع زیر را در $x = \frac{\pi}{۲}$ حساب کنید:

$$f(x) = \frac{x\ sinx - cosx}{sinx - x}$$

$$f'(x) = \frac{(sinx + x\ cosx + sinx)(sinx - x) - (cosx - ۱)(x\ sinx - cosx)}{(sinx - x)^۲}$$

$$\Longrightarrow f'(\frac{\pi}{۲}) = \frac{۴ - \pi}{۲ - \pi}$$

مثال ۷.۷ مقادیر a و b را بیابید چنانکه تابع زیر در $x = ۲$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۱ & \text{اگر} ,x \geq ۲ \\ ax + b & \text{اگر} ,x < ۲ \end{cases}$$

حل. ابتدا بررسی می کنیم که این تابع در $x = ۲$ پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) = f(۲) \Longrightarrow ۲(۲)^۲ - ۱ = a(۲) + b \Longrightarrow ۲a + b = ۷$$

برای مشتق چپ و راست $f'_+(۲) = f'_-(۲) \Longrightarrow ۴(۲) = a$ بنابراین

$$a = ۸\ ,\ \ b = -۹$$

مطلب ۴.۷ مشتق توابع دیگر بصورت ذیل بیان می شود. دقت کنید که توابع هذلولوی $sinhx$ و $coshx$ مطابق تعریف برابر $sinhx = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$ و $sinhx = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$ بوده و نیز u و v توابع دلخواهی می باشند.

$$\text{تابع} \Longrightarrow \text{مشتق} \quad (۱۴)$$

$$ln\ u \Longrightarrow \frac{u'}{u} \quad (۱۵)$$

$$(\text{عددثابت } a) \quad a^u \Longrightarrow u'a^u lna \quad (۱۶)$$

$$e^u \Longrightarrow u'e^u \quad (\text{عدد نپر } e) \qquad (۱۷)$$

$$u^v \Longrightarrow u^v(v'lnu + \frac{vu'}{u}) \quad \text{مشتق توابع توانی} \qquad (۱۸)$$

$$arcsin\ u \Longrightarrow \frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}} \qquad (۱۹)$$

$$arccos\ u \Longrightarrow \frac{-u'}{\sqrt{۱-u^۲}} \qquad (۲۰)$$

$$arctg\ u \Longrightarrow \frac{u'}{۱+u^۲} \qquad (۲۱)$$

$$arccotg\ u \Longrightarrow \frac{-u'}{۱+u^۲} \qquad (۲۲)$$

$$sinh\ u \Longrightarrow u'cosh\ u \qquad (۲۳)$$

$$cosh\ u \Longrightarrow u'sinh\ u \qquad (۲۴)$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$ln\ (۴x^۴ + ۶x - ۷) \Longrightarrow \frac{۱۶x^۳+۶}{۴x^۴+۶x-۷}$

$۳^{۲x^۷-۶x+۳} \Longrightarrow (۱۴x^۶ - ۶)۳^{۲x^۷-۶x+۳}ln۳$

$e^{۷x^۵+۶x-۱۹} \Longrightarrow (۳۵x^۴ + ۶)e^{۷x^۵+۶x-۱۹}$

$(x^۳ - ۱)^{x^۵+۶} \Longrightarrow (x^۳ - ۱)^{x^۵+۶}(۵x^۴ln(x^۳ - ۱) + \frac{(x^۵+۶)(۳x^۲)}{x^۳-۱})$

تمرین ۵.۷ منزل.

از توابع زیر مشتق بگیرید.

$$y_۱ = (x^۳ - ۹x - ۲)(x^۴ - ۳x + ۷) \quad , \quad y_۲ = (x^۵ - x^۲)(x^۷ + ۴x - ۸)^۴$$

$$y_۳ = x^۳(۲\sqrt{x}-۵)(۳x^۴+۴x) \quad , \quad y_۴ = \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \quad , \quad y_۵ = (۲x^۳+۳)(\frac{۲x-۴}{۸x+۶})^۲$$

$$y_۶ = \frac{lnx - ۱}{e^x + ۲} \quad , \quad y_۷ = \frac{(\sqrt{x^۲ - ۱} - ۴x)(x^۲ - ۷x)}{x^۴ + ۶} \quad , \quad y_۸ = \frac{x^۴ - x}{x^۴ + ۴x - ۸}$$

$$y_۹ = \frac{sinx + cosx}{sinx - cosx} \quad , \quad y_{۱۰} = ۲^{sin^۳x}+ln(tgx) \quad , \quad y_{۱۱} = tg(sin۳x)-۲cos^۳(x^۴)$$

۲.۱.۷ مشتق مراتب بالا

تاکنون مشتق مرتبه اول را توضیح داده و آنرا با y' نشان دادیم. نماد دیگری که برای مشتق اول بکار می رود $\frac{dy}{dx}$ است که نشاندهندهٔ مشتق y برحسب x است، یعنی

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

مشتق دوم یک تابع (با مشتق پیوسته) را می توان چنین تعریف نمود:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

که عبارتست از مشتق مشتق تابع و با نمادگذاری جدید چنین نشان داده می شود:

$$y'' = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^۲ y}{dx^۲}$$

در حالت کلی برای تابع $y = f(x)$ می توان مشتقهای اول f' و دوم f'' و سوم f''' و n-ام را بصورت $f^{(n)}$ معرفی کرد. یعنی

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

برای مشتقات مراتب دلخواه فرمول مشخصی وجود ندارد، تنها در برخی موارد با بدست آوردن مشتقهای مراتب مختلف می توان قاعدهٔ کلی برای مشتق n-ام یافت.

مثال ۸.۷ مشتق n-ام تابع $y = \frac{۱}{x}$ را بیابید.

حل. ابتدا چند مرتبه از مشتق را بدست آورده و فرمول مستق n-ام را طبق آنها حدس می زنیم.

$$y = \frac{۱}{x} \;\;,\;\; y' = \frac{-۱}{x^۲} \;\;,\;\; y'' = \frac{۲!}{x^۳} \;\;,\;\; y''' = \frac{-۳!}{x^۴} \quad \Longrightarrow \quad y^{(n)} = (-۱)^n \frac{n!}{x^{n+۱}}$$

۳.۱.۷ مشتق ضمنی

با نظری به تابع $x^۳ + ۲y^۵ - xy = ۳x$ در می یابیم که در این تابع متغیر y قابل جداسازی از متغیر x نبوده و نمی توانیم آنرا بصورت تابعی مستقل بنویسیم. به این نوع تابع، **تابع ضمنی** گوئیم. برای مشتقگیری از y دو روش وجود دارد.

الف) روش اصلی، در این روش با استفاده از فرمولهای مشتق، از طرفین مشتقگیری کرده و در این حالت فرض می کنیم که $x' = ۱$ و تابع y' را مستقلاً در جای خود ذکر می کنیم. برای مثال مشتق ضمنی تابع بالا چنین می شود:

$$۳x^۲ + ۲(۵y'y^۴) - (۱.y + y'x) = ۳ \Longrightarrow ۳x^۲ + ۱۰y'y^۴ - y - xy' - ۳ = ۰$$

ب) در روش ساده تر، برای تابع $f(x,y) = ۰$ مشتق ضمنی را بصورت

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

تعریف می کنیم.

مثال ۹.۷ مشتق ضمنی تابع $۳x^۳ + ۳siny = ۴y - ۲\pi$ را در نقطهٔ $(-۱, \frac{\pi}{۲})$ بیابید.
حل. داریم $f(x,y) = ۳x^۳ + ۳siny - ۴y + ۲\pi = ۰$ و با استفاده از فرمول مشتق ضمنی قسمت (ب):

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۹x^۲}{۳cosy - ۴} \Longrightarrow y' = \frac{۹}{۴}$$

۴.۱.۷ مشتق تابع معکوس

اگر تابع $y = f(x)$ تابعی یک به یک با معکوس g باشد و تابع g در $y_۰ = f(x_۰)$ پیوسته باشد، در این صورت g در $y_۰$ مشتقپذیر با مشتق زیر است:

$$g'(y_۰) = \frac{۱}{f'(x_۰)}$$

مثال ۱۰.۷ مشتق تابع معکوس تابع $x^۳ + y^۳ - ۲xy = ۵$ را در نقطهٔ $(۱, ۲)$ بیابید.
حل. چون تابع قابل جداسازی نبوده پس از مشتق ضمنی استفاده کرده و می نویسیم:

$$۳x^۲ + ۳y'y^۲ - ۲y - ۲xy' = ۰$$

و با جایگذاری مقادیر $y' = \frac{۱}{۱۰}$ مشتق تابع معکوس برابر است با

$$g'(۲) = \frac{۱}{f'(۱)} = ۱۰$$

۲.۷ کاربرد مشتق

۱.۲.۷ خط مماس و قائم بر منحنی

همانگونه که در ابتدای فصل گفته شد **شیب خط مماس عبارت است مشتق تابع در نقطهٔ تماس**. پس با بدست آوردن مشتق تابع در نقطهٔ مفروضی می توان شیب خط مماس و قائم در آن نقطه را بر منحنی یافت. بنابراین با $m = f'(x_\circ)$ و معادلات خط مماس و قائم بصورت زیر است:

$$y - f(x_\circ) = f'(x_\circ)(x - x_\circ) \qquad , \qquad y - f(x_\circ) = \frac{-۱}{f'(x_\circ)}(x - x_\circ)$$

مثال ۱۱.۷ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = ۲sinx + ۱$ را در $x = \pi$ پیدا کنید.
حل. برای شیب داریم $f'(\pi) = ۲cos(\pi) = -۲$ و معادلات خط مماس و قائم طبق فرمولهای بالا بصورت زیر خواهد بود:

$$y - ۱ = -۲(x - \pi) \quad , \quad y - ۱ = \frac{-۱}{-۲}(x - \pi)$$

$$\Longrightarrow \qquad y = -۲x + ۱ + ۲\pi \quad , \quad y = \frac{۱}{۲}x + ۱ - \frac{\pi}{۲}$$

۲.۲.۷ زاویهٔ بین دو منحنی

زاویهٔ بین دو منحنی عبارتست از زاویهٔ بین مماسهای آنها در نقطهٔ برخوردشان. برای بدست آوردن زاویهٔ بین دو منحنی شیب خطوط مماس بر دو منحنی را در نقطهٔ تقاطع آنها بدست آورده و سپس از فرمول زاویهٔ بین دو خط

$$tg\theta = |\frac{m - m'}{۱ + mm'}|$$

زاویهٔ θ بین دو منحنی را بدست می آوریم.

تمرین ٦.۷ کلاسی. زاویه بین دو منحنی زیر را بدست آورده و نشان دهید دو منحنی بر هم عمودند.

$$y = \frac{x^۳}{٦} - \frac{x^۲}{۴} \quad , \quad y = \frac{-۱}{۴}x^۲ + \frac{۴}{۳}$$

تمرین ۷.۷ منزل.

۱) مشتق دوم تابع $y = \frac{2sinx}{1-cosx}$ را در $x = \pi$ پیدا کنید.

۲) معادلهٔ خط مماس و قائم بر منحنی $y = sinx - 3x + 1$ را در $x = \pi$ پیدا کنید.

۳) معادلهٔ مماس و قائم بر منحنی $y = 3sin^2x - 4cosx$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ پیدا کنید.

۴) معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = 3x^2 - 5$ که موازی خط $2x + 3y = 4$ است را پیدا کنید.

۵) معادلهٔ خط مماس و قائم بر منحنی $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2$ را در $(5, 4)$ بیابید.

۶) زاویهٔ بین منحنی های $y = sinx$ و $y = cosx$ را $x = \frac{\pi}{4}$ حساب کنید.

۷) مشتق تابع معکوس تابع $sin(xy) + 4x^2y - y^2 = \pi^2$ را در نقطهٔ $(1, \frac{\pi}{2})$ بیابید.

۸) قاعده‌ای برای مشتق n−ام تابع $y = sinx$ پیدا کنید.

۳.۲.۷ نقاط اکسترمم

هر تابع پیوسته در یک بازهٔ دلخواه، در آن بازه دارای مقدار ماکزیمم (بیشین) و یا مقدار می‌نیمم (کمین) است. به نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع نقاط **اکسترمم** اطلاق می شود. این نقاط اکسترمم، یا نسبی هستند و یا مطلق. به بزرگترین نقطهٔ ماکزیمم، **ماکزیمم مطلق** و به کوچکترین می نیمم، **مینیمم مطلق** می گوئیم. هر تابعی که در فاصلهٔ مشخصی پیوسته باشد در آن فاصله دارای ماکزیمم و می نیمم است.

مطلب ۵.۷ هرگاه f در x_0 اکسترمم نسبی داشته باشد، آنگاه یا f در x_0 مشتق ناپذیر است و یا $f'(x_0) = 0$.

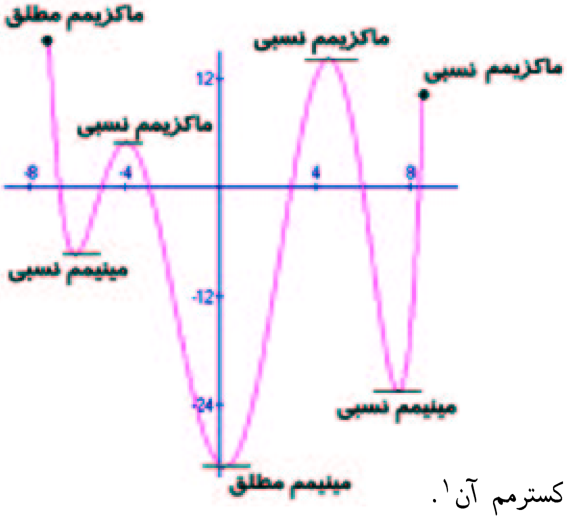
مثال ۱۲.۷ نقاط اکسترمم تابع $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 7$ را مشخص کنید.
حل. با مشتقگیری، نقاط اکسترمم عبارتند از

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2) = 0 \implies x = 1\ ,\ x = 2$$

یعنی نقاط $B(2, -3)$ و $A(1, -2)$.

لازم به ذکر است که مطالب مذکور در مطلب۵.۷، شروط **لازم** برای وجود نقاط اکسترمم هستند اما **کافی** نیستند. مثلاً چون تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه دارای همسایگی نیست، لذا در این نقاط مشتقپذیر نبوده و تابع در این نقاط اکسترمم ندارد. برای یافتن این شروط کافی، آزمونهائی ارائه می دهیم تا نقاط اکسترمم تابع مشخص شود. از مطالب بخش۱۶.۲.۳ چنین می توان نتیجه گرفت:

مطلب ۶.۷ در یک بازهٔ دلخواه، اگر $f' > 0$ باشد، تابع صعودی و اگر $f' < 0$ باشد، تابع نزولی است.



نمودار یک منحنی و نقاط اکسترمم آن[1].

مطلب ۷.۷ (آزمون مشتق اول) برای x_0 مذکور در لم ۵.۷

۱) اگر بازای نقاط سمت چپ x_0، تابع صعودی و برای نقاط راست x_0 تابع نزولی باشد، آنگاه تابع در x_0 دارای ماکزیمم نسبی است.

۲) اگر بازای نقاط سمت چپ x_0، تابع نزولی و برای نقاط راست x_0 تابع صعودی باشد، آنگاه تابع در x_0 دارای می نیمم نسبی است.

فرض کنید که طبق مطلب۵.۷، نقطهٔ x_0ی یافت شده که مشتق در آن صفر بوده و یا اینکه وجود ندارد، برای مشخص کردن نوع اکسترمم از **آزمون مشتق اول** استفاده می کنیم. نقاط انتهائی را نیز لحاظ کنید. درصورتیکه آزمون مشتق اول نوع اکسترمم را تعیین نکرد می توانیم از آزمون مشتق دوم که در ذیل بیان می گردد بهره ببریم.

مطلب ۸.۷ (آزمون مشتق دوم) برای x_0 مذکور در لم ۵.۷

۱) اگر $f''(x_0) > 0$ باشد تابع در x_0 می‌نیمم نسبی دارد.

۲) اگر $f''(x_0) < 0$ باشد تابع در x_0 دارای ماکزیمم نسبی است

[1] تابع $y = (x-3)*(x-6)*(x+3)*(x+5)*(x+6.8)*(x-8.4)/500$

مثال ۱۳.۷ نوع نقاط اکسترمم مذکور در مثال۱۲.۷ را تعیین کنید.

حل. چون $f''(x) = ۱۲x - ۱۸$ بنابراین $f''(۱) = -۶ < ۰$ و نقطهٔ $x = ۱$ ماکزیمم و نیز $f''(۲) = ۶ > ۰$ یعنی نقطهٔ $x = ۲$ می نیمم است.

در طول یک بازه ممکن است جهت تقعر منحنی بارها تغییر نماید. بطورکلی اگر در یک بازه $f'' > ۰$ باشد جهت تقعر منحنی به بالاست و اگر $f'' < ۰$ باشد جهت تقعر منحنی رو به پائین است. **نقطهٔ عطف** یک تابع نقطه ای است که در همسایگی آن جهت تقعر منحنی عوض می شود. بعبارتی دیگر نقطهٔ عطف تابع نقطه‌ای است که مشتق دوم در آنجا صفر می شود، یعنی برای بدست آوردن نقطهٔ عطف تابع «لازمست» که $f''(x_۰) = ۰$ باشد. برای وجود نقطهٔ عطف کافی است که f'' در این نقطه تغییر علامت دهد.

۴.۲.۷ رسم توابع

برای رسم نمودار یک تابع با کمک مطالب عنوان شده در بخشهای قبل لازم است مراحل زیر را بترتیب اجرا کنید:

۱) دامنهٔ تابع را بدست آورید.

۲) مجانبهای تابع را بدست آورید.

۳) با استفاده از مشتق اول نقاط اکسترمم تابع را بیابید

۴) مشتق دوم تابع را محاسبه و نقاط عطف تابع را بیابید.

۵) جدول زیر که جدول تغییرات منحنی است را رسم کنید.

۶) با استفاده از جدول تغییرات و داده های آن، نمودار منحنی را رسم نمائید.

x	$-\infty$		a		مقائم	b	$+\infty$
y'							
y	مافقی	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$\sharp$	$f(b)$	مافقی

مثال ۱۴.۷ رسم تابع

$$y = \frac{x + ۲}{x^۲ - x - ۲}$$

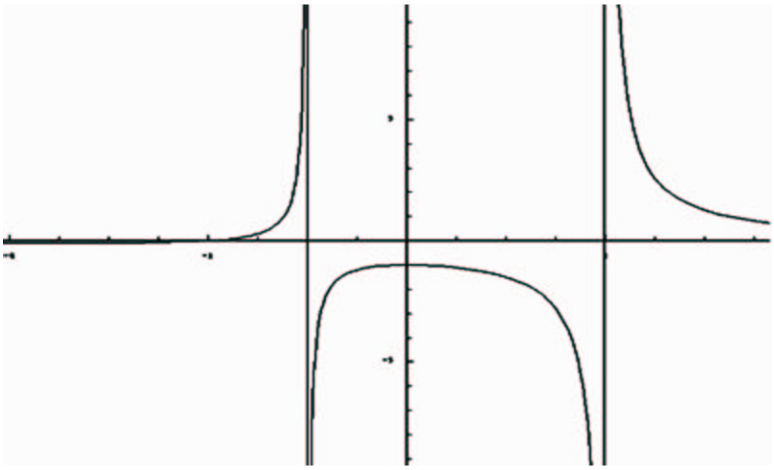
حل. مطابق مراحل بالا رفتار می کنیم.

$D_f = \mathbb{R} - \{-۱, ۲\}$

$x^۲ - x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = -۱, x = ۲$ مجانبهای قائم, $y = ۰$ مجانب مایل

$y' = \frac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, x = -4$ اکسترمم

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		∞
y'		-	0	$+$	$\sharp$	$+$	0	-	$\sharp$	-	
y	0	$\searrow$	$\frac{-1}{9}$	$\nearrow$	$\sharp$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\sharp$	$\searrow$	0
			min		$\sharp$		max		$\sharp$		



۵.۲.۷ بهینه سازی

وقتی صحبت از یافتن مقداری با شرایط خاصی است، شرایط را باید قسمت اهمّ مسئله دانست. اگر یافتن این مقدار، مبتنی بر ماکزیمم یا می نیمم بودن آن باشد مسئله را تحت عنوان بهینه سازی مطرح می کنیم. در مسائل بهینه سازی، ابتدا یافتن تابع بهینه ساز مهم بوده و سپس طبق شرایط مطرح شده مقدار بهینه را می یابیم.

مثال ۱۵.۷ عددی در بازهٔ $(0, 1]$ بیابید که تفاضل آن با مربعش ماکزیمم شود.

حل. با فرض اینکه $x \in (0, 1]$ تابع بهینه ساز را بصورت $f(x) = x - x^2$ تعریف می کنیم. برای یافتن مقدار بهینه، مطابق مباحث گفته شده داریم:

$$f(x) = x - x^2 \implies f'(x) = 1 - 2x = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

با رسم جدول تغییرات، مقدار ماکزیمم برابر $y = \frac{1}{4}$ بدست می آید.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0	-	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
			max		

۶.۲.۷ قضیهٔ رل و مقدار میانگین

قضیهٔ رل: اگر f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = k$ ، آنگاه نقطه‌ای چون $c \in (a,b)$ هست که $f'(c) = ۰$ **قضیهٔ مقدار میانگین:** اگر f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد، در اینصورت نقطه‌ای چون $c \in (a,b)$ هست بقسمی که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تمرین ۸.۷ کلاسی. قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع $y = sinx + cosx$ در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ بررسی کنید.

۷.۲.۷ قاعدهٔ هوپیتال

یکی از مزایای مشتق محاسبهٔ برخی از حدود است که با روشهای دیگر بسختی قابل حل هستند. طبق این قاعده، اگر مقدار حدکسری

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

برابر مقدار مبهم $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ شود. در اینصورت می توانیم با محاسبهٔ مشتق صورت و مخرج، حد را بصورت زیر بنویسیم:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

دقت کنید که گاهی لازم است چند بار این قاعده را بکار ببریم.

مثال ۱۶.۷ مطلوبست حدود $lim_{x\to ۰} xlnx$ و $lim_{x\to\infty} x^۲ e^{-x}$

$$\lim_{x\to ۰} xlnx = \lim_{x\to ۰} \frac{lnx}{\frac{۱}{x}} = (Hop) = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{-۱}{x^۲}} = \lim_{x\to ۰} -x = ۰$$

$$\lim_{x\to\infty} x^۲ e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^۲}{e^x} = (Hop) = \lim_{x\to\infty} \frac{۲x}{e^x} = (Hop) = \lim_{x\to\infty} \frac{۲}{e^x} = \frac{۲}{\infty} = ۰$$

مثال ۱۷.۷ محاسبهٔ حد $y = \lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x$ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال

$$lny = ln\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = \lim_{x\to\infty} ln(۱+\frac{۱}{x})^x = \lim_{x\to\infty} xln(۱+\frac{۱}{x})$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{ln(۱+\frac{۱}{x})}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}} = ۱$$

و $lny = ۱$ بنابراین $y = e^۱ = e$ در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = e \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

تمرین ۹.۷ کلاسی. مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال

$$\lim_{x\to ۰} x^x \qquad , \qquad \lim_{x\to ۰}\frac{sinx - tgx}{x^۳}$$

۳.۷ دیفرانسیل

۱.۳.۷ حساب تغییرات

چون مشتق بصورت حد تعریف می شود، در یک همسایگی کوچک x این حد تقریب خوبی خواهد بود و برای Δx خیلی کوچک می توان نوشت:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Longrightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

البته این هنگامی صحیح است که در بازهٔ $(x-\Delta x, x+\Delta x)$ مشتق کراندار باشد. بنابراین اگر برای Δx خیلی کوچک مشتق کراندار باشد، $f(x+\Delta x)$ را با تقریب خوبی بصورت زیر می نویسیم:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$$

مثال ۱۸.۷ مقدار تقریبی $\sqrt{۲۴}$ را محاسبه کنید.
حل. با فرض $f(x) = \sqrt{x}$ و $x = ۲۵$ و $\Delta x = -۱$ و طبق فرمول

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Longrightarrow \sqrt{۲۵ - ۱} \approx \sqrt{۲۵} + \frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}} \times -۱ \Longrightarrow \sqrt{۲۴} \approx ۵ - \frac{۱}{۱۰} = ۴/۹$$

برای تابعی مانند $f(x, y) = ۰$ یا $y = f(x)$ اگر در نقطهٔ دلخواهی مانند $(x_۰, y_۰)$ یکی از متغیرهای x یا y، تغییراتی ناچیز داشته باشد، با استفاده از مشتق می توان میزان تغییرات دیگری را نیز بدست آورد. برای اینکار با مشتقگیری معمولی یا ضمنی و جایگزینی dx با نمو Δx و dy با نمو Δy میزان تغییرات متغیر دلخواه بدست می آید.

مثال ۱۹.۷ در تابع $x^۳ + y^۳ = ۲xy$ اگر در $(-۱, -۱)$ میزان تغییرات x برابر $۰/۲$ باشد، میزان تغییرات y چیست.
حل. داریم $x^۳ + y^۳ = ۲xy$ پس $f(x, y) = x^۳ + y^۳ - ۲xy = ۰$ با مشتقگیری ضمنی داریم

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۳x^۲ - ۲y}{۳y^۲ - ۲x} \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۳x^۲ - ۲y}{۳y^۲ - ۲x} \Longrightarrow \frac{\Delta y}{۰/۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

و تغییرات y برابر $\Delta y = ۰/۲$ خواهد بود.

۲.۳.۷ دیفرانسیل

در حساب تفاضلات و بحث مشتق، دیفرانسیل[۲] در واقع همان مشتق بوده و به نوعی همان قوانین مشتق بکار می روند. در ابتدا مانند پدید آورندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی نیوتن و لایب نیتز ما برای نماد مشتق نماد $\frac{dy}{dy}$ را بکار می بریم. نماد d نمایشگر دیفرانسیل بوده و منظور از dx دیفرانسیل بر حسب متغیر x است. برای محاسبهٔ دیفرانسیل دو طرف یک معادله از قوانین زیر استفاده می کنیم. برای تابع $y = f(x)$ دیفرانسیل را بصورت $dy = f'(x)dx$ تعریف می کنیم. برای مثال

$$d(x^۳) = ۳x^۲\ dx$$

---
[۲] $Differential$

برای محاسبهٔ فرمولهای دیفرانسیل کافیست از همان قوانین مشتقگیری استفاده کنیم. بدین ترتیب

$$d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg \qquad d(fg)=df.g+f.dg \qquad d(\frac{f}{g})=\frac{df.g-f.dg}{g^۲}$$

به مثال های زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned}
y=۳x^۴-۶x+۳ &\implies dy=(۱۲x^۲-۶)dx\\
u^۵+۶u-۴=cost &\implies (۵u^۴+۶)du=-sint\ dt\\
۳y^۲=v\ sinv &\implies ۶ydy=(sinv+vcosv)dv\\
\sqrt{y}=cotg\ u &\implies \frac{dy}{۲\sqrt{y}}=-(۱+cotg^۲u)du\\
d(\frac{۲x-۱}{۳x+۲}) &\implies \frac{-۱}{(۳x+۲)^۲}dx
\end{aligned}$$

مثال ۲۰.۷ دیفرانسیل عبارت $\frac{x}{x^۲+۱}$ را بنویسید.

$$\frac{d(x)(x^۲+۱)-d(x^۲+۱)x}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{x^۲dx+dx-۲x^۲dx}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}dx$$

تمرین ۱۰.۷ منزل.

۱) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x=-۱$ مشتقپذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^۲+a & , \quad x>-۱ \text{ اگر} \\ ax^۳+b & , \quad x\leq -۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

۲) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x=\pi$ مشتقپذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} sinx+acosx & , \quad x\geq \pi \text{ اگر} \\ cosx-bsinx & , \quad x<\pi \text{ اگر} \end{cases}$$

۳) از توابع زیر مشتق بگیرید:

$(a)\ \ y=(arcsinx)ln(x\ sinx-cosx)\ \ ,\ \ (b)\ \ sin(xy)+cos(x^۲y)=tg(x+y)$

$(c)\ \ y=2xe^x sinhx \quad , \quad (d)\ \ y=ln(cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}) \quad , \quad (e)\ \ y=(sinx)^{sinx}$

$(f)\ \ y=x^{x^x} \quad , \quad (g)\ \ y=\sqrt[4]{\dfrac{cos2x-4}{sin3x+5x}} \quad , \quad (h)\ \ y=sin(\sqrt{\dfrac{cosx+1}{cosx-1}})$

$(i)\ \ x^4+y^4-4xy=1 \quad , \quad (j)\ \ y=tg(tg(tg2x)) \quad , \quad (k)\ \ y=\sqrt{tg^3x}$

$(l)\ \ x^2siny+y^2cosx=xy \quad , \quad (m)\ \ y=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}$

$(n)\ \ \sqrt{xy}+x^2y^3=y \quad , \quad (o)\ \ y=(tg2x)^{ln(cosx)} \quad , \quad (p)\ \ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1$

۴) مشتق سوم تابع $y=\frac{tgx-1}{tgx+1}$ را در $x=\frac{\pi}{4}$ پیدا کنید.

۵) مشتق دوم تابع $cos^3(sin3x)$ را بیابید.

۶) معادلهٔ خط مماس و قائم بر منحنی $y=2\sqrt[3]{x-1}+3$ را در $(1,3)$ بیابید.

۷) معادلهٔ مماس بر منحنی $y=\sqrt{x-1}+6$ را که عمود بر خط $x+2y+4=0$ است را پیدا کنید.

۸) خطوط مماس و قائم برمنحنی $2xsiny+ycosx=2y$ را درنقطهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ بنویسید.

۹) مشتق n–ام تابع $y=\frac{1}{1-x}$ را بیابید و سپس مقدار $y^{(100)}(0)$ را حساب کنید.

۱۰) برای تابع $x^3+y^3+axy=-1$ ثابت کنید $2f'(x)-f(1)=0$

۱۱) نقاط اکسترمم توابع زیر را در بازهٔ مورد نظر مشخص کنید.

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-4}\ ,\ [-1,1] \qquad , \qquad g(x)=x^4-8x^2+10\ ,\ [-3,3]$$
$$h(x)=x^2-4x+6\ ,\ [-3,10] \qquad , \qquad i(x)=|x^2-3x+2|\ ,\ [-10,10]$$
$$j(x)=sin2x-1\ ,\ [-\pi,\pi] \qquad , \qquad k(x)=\sqrt{5-4x}\ ,\ [-1,1]$$

۱۲) نقاط عطف توابع زیر را بیابید.

$$y_{1} = 2x^{4} - 3x^{2} + 2x \quad , \quad y_{2} = \frac{x+1}{x^{2}+1} \quad , \quad y_{3} = ln(1+x^{2}) \quad , \quad y_{4} = x\, arctgx$$

۱۳) توابع زیر را رسم کنید

$$(a)\ \ y = 2x^{4} - 16x^{2} + 10 \quad , \quad (b)\ \ y = \frac{x-1}{x^{2}+x-6} \quad , \quad (c)\ \ y = \frac{1}{1+x^{2}}$$

$$(d)\ \ y = \frac{x^{2}+1}{x^{2}+3x-4} \quad , \quad (e)\ \ y = \frac{x^{2}-4}{x^{2}+x} \quad , \quad (f)\ \ y = \frac{2x^{2}-2x+3}{x^{2}-x}$$

$$(g)\ \ y = \frac{x^{3}-1}{x^{2}+5x+4} \quad , \quad (h)\ \ y = 2sinx - 1 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$$

۱۴) اگر $f(x) = ax^{3} + bx^{2} + cx$ مقادیر a, b, c را بیابید چنانکه f در $(1, 2)$ نقطهٔ عطف داشته و شیب مماس در آن -2 باشد.

۱۵) با استفاده از مشتق مقدار تقریبی $tg24^{o}$ و $cos61^{o}$ و $\sqrt[4]{80}$ محاسبه کنید.

۱۶) با استفاده از قضیهٔ رل ثابت کنید که تابع $y = sinx + x - 1$ در بازه های $(0, \pi)$ و $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ دارای ریشه است.

۱۷) عددی در بازهٔ $[0, 2]$ بیابید که مجموع آن با معکوسش ماکزیمم شود.

۱۸) مثلث قائمی بیابید با بیشترین مساحت که مجموع یک ضلع و وترش ثابت باشد.

۱۹) در یک کره با شعاع a استوانه ای با بیشترین حجم محاط کنید.

۲۰) ثابت کنید تفاضل جذر دو عدد صحیح متوالی بیش از ۲۵، از ۰/۱ کمتر است.

۲۱) یک بالون در حال باد شدن، در هر ثانیه افزایش حجمی به میزان ۴ متر مکعب دارد. هنگامی که قطر آن ۱۰ متر است میزان تغییرات قطر آن چه مقدار است؟

۲۲) در مداری با ولتاژ ثابت و مقاومت ۵ اهم، اگر در جریان ۴ آمپری میزان تغییرات شدت جریان برابر ۱۰ میلی آمپر باشد، میزان تغییرات توان چند وات خواهد بود؟

۲۳) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}\ ,\quad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}\ ,\quad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{sin^3x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\sqrt{1+x}-1}\ ,\quad (e)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}\ ,\quad (f)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ln(tanx)}{cos2x}$$

$$(g)\ \lim_{x\to-\infty}xln\frac{2a+x}{a+x}\ ,\quad (h)\ \lim_{x\to 0}\frac{log_{10}(1+x)}{10^x-1}\ ,\quad (i)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tan2x}$$

$$(j)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\ ,\quad (k)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{sin2x}-e^{sinx}}{x}\ ,\quad (l)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{(1+\frac{1}{x})}$$

۲۴) با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین ثابت کنید $|sin\ x|\leq|x|$

پروژه ۱.۷ (مشتقگیری ۱)
با استفاده از تعریف مشتق مقادیر مشتق توابع که در مطالب ۲.۷ و ۳.۷ و ۴.۷ ذکر شده‌اند را بدست آورید.

پروژه ۲.۷ (مشتقگیری ۲)
(الف) با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین ثابت کنید اگر $0<a<b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b}<ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

(ب) با قرار دادن مقادیر $a=n$ و $b=n+1$ و قسمت (الف) ثابت کنید

$$\frac{1}{1+n}<ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

(ج) با استفاده از قسمت (ب) و قضیهٔ فشردگی ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

فصل ۸

انتگرال

۱.۸ انتگرال و روش ها

انتگرال را عکس حالت مشتق گیری یا پادمشتق معرفی می کنند. بدین معنی که تابعی پیوسته مانند $f(x)$ داریم و می خواهیم تابع $F(x)$ را چنان بدست آوریم که $F'(x) = f(x)$ باشد. به تابع $F(x)$ بدست آمده، تابع اولیهٔ $f(x)$ گوئیم. برای مثال می دانیم $[sin(x)]' = cos(x)$ پس $sin(x)$ تابع اولیهٔ $cos(x)$ است. جهت بدست آوردن تابع اولیه از قواعدی بهره خواهیم گرفت که مبحث این بخش را تشکیل می دهد. در این روش برای بدست آوردن تابع اولیه یا انتگرال یک تابع، نماد $\int$ در کنار $d(x)$ بکار خواهیم برد و نماد متعارف زیر را می نویسیم:

$$\int f(x)\ dx = F(x)$$

که تابع $f(x)$ را انتگرالده (انتگران)، dx را متغیر انتگرالگیری و $F(x)$ را پادمشتق $f(x)$ نامیم. برای مثال بالا $\int cos(x)\ dx = sin(x)$. اگر بدانیم تابع انتگرالده اولیهٔ x^n عبارتست از $\frac{x^{n+۱}}{n+۱}$، سپس برای بدست آوردن تابع اولیهٔ $x^۴ + ۵x^۳ - ۷x$ می نویسیم:

$$\int x^۴+۵x^۳-۷x\ dx = \int x^۴\ dx+۵\int x^۳\ dx-۷\int x\ dx = \frac{x^۵}{۵}+۵\frac{x^۴}{۴}-۷\frac{x^۲}{۲}+C$$

زیرا انتگرال عملگری خطی است یعنی:

$$\int [Af(x) + Bg(x)]\ dx = A\int f(x)\ dx + B\int g(x)\ dx$$

ثابت C به نام «ثابت انتگرال»، که در انتهای کار ذکر شده را ما در همهٔ انتگرالها ذکر خواهیم نمود. بنابراین برای مجموع چند تابع می توان از تک تک توابع جداگانه انتگرال گرفت. به مثال دیگری توجه کنید:

$$\int 4x^5 + 3\sqrt[4]{x^3} - \frac{6}{\sqrt[7]{x^2}}\, dx = \int 4x^5 + 3x^{\frac{3}{4}} - 6x^{\frac{-2}{7}}\, dx$$

$$= 4\frac{x^6}{6} + 3\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 6\frac{x^{\frac{-2}{7}+1}}{\frac{-2}{7}+1} + C$$

۱.۱.۸ فرمولهای انتگرال

چند فرمول مهم انتگرال را در جدول ذیل ذکر نمودیم. برای انتگرال گیری از توابع مختلف می بایست انتگران را به یکی از اشکال زیر درآورد.

$$\int 1\, dx = \int dx = x + C \qquad (1)$$

$$\int a\, dx = ax + C \qquad a \text{ عدد ثابت} \qquad (2)$$

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1 \text{ عدد حقیقی } r) \qquad (3)$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + C \qquad (x \neq 0) \qquad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = ln|x-a| + C \qquad (x \neq a) \qquad (5)$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c \qquad (6)$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + c \qquad (a > 0\ ,\ a \neq 1) \qquad (7)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = arcsin(\frac{x}{a}) + C \qquad (a > 0) \qquad (8)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = arcsinh(\frac{x}{a}) + C \qquad (a > 0) \qquad (9)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a}) + C \qquad (a \neq 0) \qquad (10)$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{a+x}{a-x}| + C \qquad (a \neq 0) \qquad (11)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\, dx = \frac{1}{b-a}ln|\frac{x+b}{x+a}| + C \quad , \quad (a \neq b) \qquad (12)$$

به مثالهای زیر توجه کنید.

$$\int \frac{۴\sqrt{x}}{x}-۲^{x+۱}+\frac{۳}{x}\,dx = \int ۴x^{\frac{-۱}{۲}}-۲\times ۲^{x}+۳\frac{۱}{x}\,dx = ۸\sqrt{x}-\frac{۲^{x+۱}}{ln۲}+۳ln|x|+C$$

$$\int \frac{۴x^{۳}-۹x}{x^{۲}}\,dx = \int \frac{۴x^{۳}}{x^{۲}}-\frac{۹x}{x^{۲}}\,dx = \int ۴x-۹\frac{۱}{x}\,dx = ۲x^{۲}-۹ln|x|+C$$

$$\int \frac{dx}{۱۶-x^{۲}} = \frac{۱}{۸}ln|\frac{۴+x}{۴-x}|+C \quad , \quad \int \frac{dx}{۹+x^{۲}} = \frac{۱}{۳}arctg(\frac{x}{۳})+C$$

تمرین ۱.۸ کلاسی. انتگرالهای زیر را بیابید.

$$\int \frac{۵dx}{\sqrt{۱۶-۴x^{۲}}} \quad , \quad \int ۴\sqrt[۳]{x}-۵^{x}+\frac{۳}{x^{۳}}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{۴-x^{۲}}} = arcsin(\frac{x}{۲})+C$$

۲.۱.۸ انتگرال توابع کسری

در مواردی که صورت چندجمله‌ای و مخرج یک جمله ای است، عاملها را تفکیک می کنیم. برای مثال

$$\int \frac{x^{۵}+۷x^{۲}-۶}{x^{۳}}\,dx = \int x^{۲}+\frac{۷}{x}-۶x^{-۳}\,dx = \frac{x^{۳}}{۳}+۷ln|x|+\frac{۳}{x^{۲}}+C$$

اگر درجهٔ صورت از مخرج بیشتر باشد، با تقسیم صورت بر مخرج و بدست آوردن خارج قسمت، انتگرال می گیریم:

$$\int \frac{۲x^{۴}-۵x^{۳}+۷x-۱}{x-۲}\,dx$$

$$= \int ۲x^{۳}-x^{۲}-۲x+۳+\frac{۵}{x-۲}\,dx = \frac{۱}{۲}x^{۴}-\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۳x+۵ln|x-۲|+C$$

تمرین ۲.۸ کلاسی. انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int \frac{x^{۴}+۲x^{۳}+۸x-۱۰}{x^{۲}+۴}\,dx$$

برای برخی انتگرالها که صورت و مخرج چندجمله‌ای بوده و مخرج را بتوان تجزیه کرد، این روش که آن را **روش تجزیهٔ کسرها** نامند، را بکار می گیریم.

مثال ۱.۸ مطلوبست حل انتگرال زیر

$$I = \int \frac{۲x - ۱۲}{x^۳ - ۵x^۲ + ۶x} dx$$

حل. با تجزیه کسر انتگرال و فرض ضرایب A و B و C داریم:

$$\frac{۲x - ۱۲}{x^۳ - ۵x^۲ + ۶x} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - ۲} + \frac{C}{x - ۳}$$

پس از مخرج مشترک و ساده کردن صورت، هم‌ارزی زیر حاصل می شود:

$$\frac{۲x - ۱۲}{x^۳ - ۵x^۲ + ۶x} \equiv \frac{(A + B + C)x^۲ + (-۵A - ۳B - ۲C)x + ۶A}{x(x - ۲)(x - ۳)}$$

از آنجا که مخرج دو طرف برابر است، با تناظر مقادیر صورت

$$A+B+C = ۰, -۵A-۳B-۲C = ۲, ۶A = -۱۲ \Rightarrow A = -۲, B = ۴, C = -۲$$

با جایگذاری مقادیر و مطابق فرمولهای انتگرال، حاصل چنین می شود:

$$I = \int (\frac{-۲}{x} + \frac{۲}{x - ۲} + \frac{۱}{x - ۳})\, dx = -۲ln|x| + ۲ln|x - ۲| + ln|x - ۳| + C$$

انتگرال چندجمله‌ای که درصورتیکه مخرج تجزیه می شود در فوق ذکر گردید. در حالتی که مخرج تجزیه نمی شود، معمولاً حاصل، شکلی از انتگرال $arctg\ u$ خواهد بود (مثال ۷.۸ را ببینید).

تمرین ۳.۸ منزل. انتگرالهای زیر را حل کنید:

$$(a) \quad \int (x^۲ + ۵)(۳x^۳ - ۴)dx \quad , \quad (b) \quad \int \frac{x^۵ - ۶x^۲ + ۴\sqrt{۲}x^۳ + ۲}{۳x^۲} dx$$

$$(c) \quad \int \frac{x^۵ - ۲x^۴ + x^۳ + ۲x^۲}{x^۲ + ۱} dx \quad , \quad (d) \quad \int \frac{۲}{x^۲ - ۷x + ۱۲}\, dx$$

$$(e) \quad \int \frac{x + ۱}{x^۳ + ۲x^۲ - ۳x} dx \quad , \quad (f) \quad \int \frac{۳x + ۲}{x^۳ - ۷x - ۶} dx$$

۳.۱.۸ روش جانشینی

برای حل برخی انتگرالها لازم است با تغییر متغیر و جانشینی متغیری بخصوص، انتگرال را ساده‌تر کرده و سپس از فرمولهای قبلی استفاده کنیم. طریقهٔ جانشین گرفتن برای متغیر بایستی چنان انجام شود که معمولاً مشتق آن در کنار dx موجود باشد. برای مثال انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int \frac{۴x\ dx}{(۲x^۲ - ۳)^{۲۳}}$$

مسلماً با بتوان رساندن عامل $(۲x^۲ - ۳)^{۲۳}$ در مخرج و یا روشهای گذشته این انتگرال بسختی! قابل حل است. از روش جانشینی به این طریق عمل می کنیم که با فرض $u = ۲x^۲ - ۳$ بعنوان متغیر جانشین، از طرفین دیفرانسیل می گیریم $۴x\ dx = du$ و با جایگذاری مقادیر بدست آمده در انتگرال داریم:

$$I = \int \frac{۴x\ dx}{(۲x^۲ - ۳)^{۲۳}} = \int \frac{du}{u^{۲۳}} = \int u^{-۲۳}\ du = \frac{u^{-۲۲}}{-۲۲} + C$$

$$= -\frac{۱}{۲۲u^{۲۲}} + C = -\frac{۱}{۲۲(۲x^۲ - ۳)^{۲۲}} + C$$

مثال ۲.۸ حل انتگرال

$$\int \frac{۳x^۲ - ۱}{\sqrt{x^۳ - x + ۱}}\ dx$$

حل. از روش جانشینی بدو طریق مسئله را حل می کنیم. با فرض $u = ۱ + x^۳ - x$ از طرفین دیفرانسیل می گیریم $(۳x^۲ - ۱)dx = du$ و با جایگذاری مقادیر بدست آمده در انتگرال داریم:

$$\int \frac{۳x^۲ - ۱}{\sqrt{x^۳ - x + ۱}}\ dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = ۲\sqrt{u} + C = ۲\sqrt{x^۳ - x + ۱} + C$$

با فرض $u^۲ = ۱ + x - x^۳$ و گرفتن دیفرانسیل از طرفین $(۳x^۲ - ۱)dx = ۲udu$ و سپس جایگذاری مقادیر بدست آمده در انتگرال نتیجه می گیریم:

$$\int \frac{۳x^۲ - ۱}{\sqrt{x^۳ - x + ۱}}\ dx = \int \frac{۲udu}{u} = \int ۲du = ۲u + C = ۲\sqrt{x^۳ - x + ۱} + C$$

مثال ۳.۸ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int \frac{۲x + ۱}{x^{۲} + x + ۱} dx$$

حل. با روش جانشینی فرض کنید $u = x^{۲} + x + ۱$ و دیفرانسیل می گیریم

$$(۲x + ۱)dx = du$$

با جایگذاری:

$$I = \int \frac{۲x + ۱}{x^{۲} + x + ۱} dx = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|x^{۲} + x + ۱| + C$$

تمرین ۴.۸ منزل. انتگرال های زیر را به روش جانشینی حل کنید.

$$(a) \quad \int x^{۲}\sqrt{۱ + x^{۳}} dx \quad , \quad (b) \quad \int x(۱ + x)^{۵۰} \; dx \quad , \quad (c) \quad \int \frac{(x^{\frac{۱}{۳}} + ۲)^{۴}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}} dx$$

۴.۱.۸ انتگرال توابع مثلثاتی

فرمول های انتگرالی توابع مثلثاتی و توابع هیپربولیک چنین است:

$$\int sinax \; dx = -\frac{۱}{a} cosax + C \qquad (a \neq ۰) \qquad (۱۳)$$

$$\int cosax \; dx = \frac{۱}{a} sinax + C \qquad (a \neq ۰) \qquad (۱۴)$$

$$\int \frac{۱}{sin^{۲}x} dx = -cotgx + C \qquad (۱۵)$$

$$\int \frac{۱}{cos^{۲}x} dx = tgx + C \qquad (۱۶)$$

$$\int sinhx \; dx = coshx + C \qquad (۱۷)$$

$$\int coshx \; dx = sinhx + C \qquad (۱۸)$$

$$\int \frac{۱}{sinh^{۲}x} dx = -cotghx + C \qquad (۱۹)$$

$$\int \frac{۱}{cosh^{۲}x} dx = tghx + C \qquad (۲۰)$$

برای مثال

$$\int \ sin۳x + ۴cos۲x - \frac{۷}{sin^۲x} \ dx = -\frac{۱}{۳}cos۳x + ۲sin۲x - ۷cotgx + C$$

$$\int sin۲x \ cos۴x \ dx = \int \frac{۱}{۲}(sin۳x - sin \ x)dx = \frac{۱}{۲}(\frac{-cos۳x}{۳} + cosx) + C$$

$$= \frac{-cos۳x}{٦} + \frac{cos \ x}{۲} + C$$

در حل برخی از انتگرالها **روش جانشینی مثلثاتی** بسیار موثر است که در ادامه با اتحادهای مثلثاتی انتگرال را ساده خواهیم نمود. مثلاً اگر انتگرالده دارای عامل $\sqrt{a^۲ - x^۲}$ باشد (a عددی دلخواه است)، از تغییر متغیر $x = a \ sin\theta$ یا $x = a \ cos\theta$ استفاده می کنیم.

مثال ۴.۸ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۹ - x^۲}}$$

حل. با جانشین مثلثاتی $x = ۳ \ sin\theta$ و دیفرانسیل از طرفین آن $dx = ۳ \ cos\theta d\theta$ مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم:

$$I = \int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۹ - x^۲}} = \int \frac{۳cos\theta d\theta}{(۳sin\theta)^۲\sqrt{۹ - (۳sin\theta)^۲}} = \int \frac{۳cos\theta d\theta}{۹sin^۲\theta۳cos\theta}$$

$$= \frac{۱}{۹}\int \frac{d\theta}{sin^۲\theta} = -\frac{۱}{۹}cotg\theta + C$$

لازم است متغیر را دوباره به x برگردانیم. چون $\frac{x}{۳} = sin\theta$ پس

$$cotg\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{\sqrt{۱ - sin^۲\theta}}{sin\theta} = \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{x} \Longrightarrow I = -\frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{۹x} + C$$

برای محاسبهٔ انتگرالهائی که دارای عامل $a^۲ + x^۲$ هستند از تغییرمتغیر $x = a \ tgx$ یا $x = a \ cotgx$ استفاده کنید.

مثال ۵.۸ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$J = \int \frac{۲xdx}{۱٦ + x^۴}$$

حل. از آنجا که $x^{۴} + ۱۶ = (x^{۲})^{۲} + ۱۶$ با گرفتن جانشین مثلثاتی $x^{۲} = ۴\ tg\theta$ و نیز دیفرانسیل از طرفین آن چنین داریم

$$۲x\ dx = ۴(۱ + tg^{۲}\theta)d\theta$$

و مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم:

$$J = \int \frac{۴(۱ + tg^{۲}\theta)d\theta}{۱۶ + ۱۶tg^{۲}\theta} = \int \frac{d\theta}{۴} = \frac{\theta}{۴} + c = \frac{۱}{۴}arctg(\frac{x^{۲}}{۴}) + C$$

مثال ۶.۸ مطلوبست انتگرال

$$K = \int\ sin^{۱۰}x\ cosx\ dx$$

حل. با تغییر متغیر $sinx = u$ و $cosx\ dx = du$ و جایگذاری داریم:

$$K = \int\ sin^{۱۰}x\ cosx\ dx = \int\ u^{۱۰}\ du = \frac{u^{۱۱}}{۱۱} + C = \frac{sin^{۱۱}x}{۱۱} + C$$

مثال ۷.۸ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int \frac{dx}{x^{۲} + x + ۱}$$

حل. چون

$$I = \int \frac{dx}{x^{۲} + x + ۱} = \int \frac{dx}{(x + \frac{۱}{۲})^{۲} + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}$$

با تغییر متغیر

$$x + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}tg\theta$$

دیفرانسیل عبارت چنین خواهد بود

$$dx = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱ + tg^{۲}\theta)d\theta$$

و با جایگذاری

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱ + tg^{۲}\theta)d\theta}{\frac{۳}{۴}(۱ + tg^{۲}\theta) + \frac{۳}{۴}} = \int\ \frac{۲d\theta}{\sqrt{۳}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\theta + C = \frac{۲}{\sqrt{۳}}arctg(\frac{۲x + ۱}{\sqrt{۳}}) + C$$

مطلب ۱.۸ در موارد خاص $\int \ sin^n x \ dx$ و $\int \ cos^n x \ dx$ مسئله را در دو حالت حل می کنیم.

الف) اگر n فرد باشد. گیریم $n = ۲k + ۱$ و می نویسیم

$$\int \ sin^n x \, dx = \int \ sin^{۲k+۱} x \, dx = \int \ sin^{۲k} x \, sinx \, dx = \int \ (۱-cos^۲ x)^k \ sinx \, dx$$

با تغییر متغیر $cosx = u$ انتگرال را بروش جانشینی حل می کنیم. برای انتگرال دیگر نیز بهمین شیوه و با تغییر متغیر $sinx = u$ بروش جانشینی عمل می کنیم.

ب) اگر n زوج باشد، $n = ۲k$ و از فرمولهای

$$sin^۲ x = \frac{۱ - cos۲x}{۲} \quad , \quad cos^۲ x = \frac{۱ + cos۲x}{۲}$$

استفاده می کنیم. سپس با ادامهٔ این روند توان را در انتگرال از بین می بریم.

در حالاتی که انتگرال بصورت $\int sin^n x \ cos^m x \ dx$ است به یکی از دو صورت بالا در می آوریم. اگر m و n زوج باشند، به روش (ب) و اگر دست کم یکی از m و n فرد باشد، به روش (الف) انتگرال براحتی قابل حل خواهد بود.

مثال ۸.۸ حل انتگرال $I = \int \ cos^۵ x \ dx$

حل. چون توان فرد است

$$I = \int \ cos^۵ x \ dx = \int \ cos^۴ x \ cosx \ dx = \int \ (۱ - sin^۲ x)^۲ \ cosx \ dx$$

با تغییر متغیر $sinx = u$ و دیفرانسیل طرفین آن $cosx \ dx = du$ و

$$I = \int (۱ - u^۲)^۲ \ du = \int \ ۱ - ۲u^۲ + u^۴ \ du = u - \frac{۲}{۳} u^۳ + \frac{۱}{۵} u^۵ + C$$

$$= sinx - \frac{۲}{۳} sin^۳ x + \frac{۱}{۵} sin^۵ x + C$$

مثال ۹.۸ حل انتگرال $J = \int \ sin^۶ x \ dx$

حل. برای توان زوج از فرمول $cos^۲ x = \frac{۱+cos۲x}{۲}$ استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} J &= \int (sin^۲ x)^۳ \ dx \\ &= \int \ (\frac{۱ - cos۲x}{۲})^۳ \ dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{۱}{۸}\int ۱ - ۳cos۲x + ۳cos^{۲}۲x - cos^{۳}۲x \; dx \\
&= \frac{۱}{۸}\int ۱ - ۳cos۲x + ۳\frac{۱ + cos۴x}{۲} - cos^{۲}۲xcos۲x \; dx \\
&= \frac{۵x}{۱۶} - \frac{۳sin۲x}{۱۶} + \frac{۳sin۴x}{۶۴} - \frac{۱}{۸}\int (۱ - sin^{۲}۲x)cos۲x \; dx \\
&= \cdots - \frac{۱}{۸}\frac{۱}{۲}\int (۱ - u^{۲})du \\
&= \cdots - \frac{۱}{۱۶}(u - \frac{u^{۳}}{۳}) \\
&= \cdots - \frac{۱}{۱۶}(sin۲x - \frac{sin^{۳}۲x}{۳}) \\
&= \frac{۵x}{۱۶} - \frac{۳sin۲x}{۱۶} + \frac{۳sin۴x}{۶۴} - \frac{۱}{۱۶}(sin۲x - \frac{sin^{۳}۲x}{۳}) + C
\end{aligned}
$$

تمرین ۵.۸ منزل. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال های زیر

$(a)\quad \int sin(۳x) + cos(۴x) - ۳sinx\; cosx\; dx$

$(b)\quad \int sin۲x\; sin۵x\; dx$

$(c)\quad \int sin۲x\; cos^{۳}۲x\; dx$

$(d)\quad \int tanh۲xdx$

$(e)\quad \int sin۳xcos۴xsin۶x\; dx$

$(f)\quad \int sin^{۲}۳xdx$

$(g)\quad \int sin^{۳}۴x\; \sqrt[۳]{cos۴x}\; dx$

$(h)\quad \int \frac{xdx}{x^{۴} + ۳}$

$(i)\quad \int cos۲x\sqrt{۱ - cos۴x}\; dx$

$(j)\quad \int cos^{۴}x\; dx$

$(k)\quad \int sin(cos\, x)sin۲x\; dx$

$(l)\quad \int tg^{۲}x\; dx$

$(m)\quad \int \frac{cotg\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}dx$

$(n)\quad \int \frac{cosx\; dx}{۱ + sin^{۲}x}$

مطلب ۲.۸ در برخی از انتگرالها لازم است از روشهای متعددی استفاده شود تا به جواب نهائی برسیم. برای مثال

مثال ۱۰.۸ مطلوبست حل انتگرال زیر

$$I = \int \frac{x+2}{x^3-1}dx$$

حل. با تجزیه کسر انتگرال و فرض ضرایب A و B و C داریم:

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

پس از مخرج مشترک و ساده کردن صورت

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

بنابر تناظر مقادیر صورت

$$A+B=0,\ A-B+C=1,\ A-C=2 \implies A=-1,\ B=-1,\ C=-1$$

$$I = \int \frac{x+2}{x^3-1}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

مطابق مثالهای ۳.۸ و ۷.۸ حاصل چنین می شود.

$$I = \int \frac{x+2}{x^3-1}dx = ln|x-1| - \frac{1}{2}ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

۵.۱.۸ روش جزء به جزء

از مهمترین روشهای انتگرالگیری، روش جزء به جزء است که برای حل برخی از انتگرال هائی بکار می رود که با سایر روشها قابل حل نیستند. فرمول انتگرالگیری بروش جزء به جزء بشکل زیر است:

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

که u و v توابعی دلخواهند. برای حل یک انتگرال بروش جزء به جزء، ابتدا تابع مورد نظر را به توابع u و v تفکیک نموده و سپس از فرمول فوق بهره می گیریم. تفکیک u و v بایستی بنحوی باشد که انتگرال رو به ساده شدن رفته و در اکثر حالات تابع u را آن قسمتی می گیریم که مشتق آن ساده‌تر شود. به دو مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۱.۸ حل انتگرال $\int x\ e^x\ dx$

$$x = u \ \Rightarrow\ \text{بدست آید } du \text{ دیفرانسیل می گیریم تا} \ \Rightarrow\ dx = du$$
$$e^x\ dx = dv \ \Rightarrow\ \text{انتگرال می گیریم تا مقدار } v \text{ بدست آید} \ \Rightarrow\ e^x = v$$

$$\int\ xe^x\ dx = (x)(e^x) - \int\ e^x\ dx = xe^x - e^x + C$$

مثال ۱۲.۸ حل انتگرال $\int\ x\ sinx\ dx$

$$x = u \ \Rightarrow\ \text{دیفرانسیل می گیریم} \ \Rightarrow\ dx = du$$
$$sinx\ dx = dv \ \Rightarrow\ \text{انتگرال می گیریم} \ \Rightarrow\ -cosx = v$$

$$\int\ x\ sinx\ dx = (x)(-cosx) - \int -cosx\ dx = -x\ cosx + sinx + C$$

تمرین ۶.۸ منزل. انتگرال های زیر را با روش جزء به جزء حساب کنید.

$$(a)\ \int xe^{5x}dx\ \ ,\ \ (b)\ \int x^2e^x dx\ \ ,\ \ (c)\ \int x^2 sinx\ dx\ \ ,\ \ (d)\ \int x^3\ cosx\ dx$$

۲.۸ انتگرال معین و کاربردها

از کاربردی ترین مسائل مطرح شده در **حسابان**، انتگرال است، که مبحث ضروری بخصوص در محاسبهٔ سطح و حجم است و ما در ذیل بطور مختصر آنها را ذکر خواهیم نمود. در ابتدا به تعریف انتگرال معین می پردازیم. به انتگرالی به شکل

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

انتگرال معین اطلاق می شود که بین دو حد $x = a$ (حد پائین) و $x = b$ (حد بالا) قرار می گیرد و بدین صورت تعریف می شود که اگر $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد چنانکه $F'(x) = f(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b F'(x)\ dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

بنابراین با حل انتگرال بصورت نامعین و بدون در نظر گرفتن حدود آن، تابع اولیه را بدست آورده و سپس با جایگذاری حدود بالا و پائین (بترتیب) در تابع اولیه و بدست آوردن تفاضل آنها حاصل انتگرال معین بصورت یک **عدد حقیقی** حاصل می شود.

مثال ۱۳.۸ مطلوبست مقدار انتگرال

$$I = \int_{۲}^{۳} \frac{۲x + ۱}{x^{۲} + x + ۱} dx$$

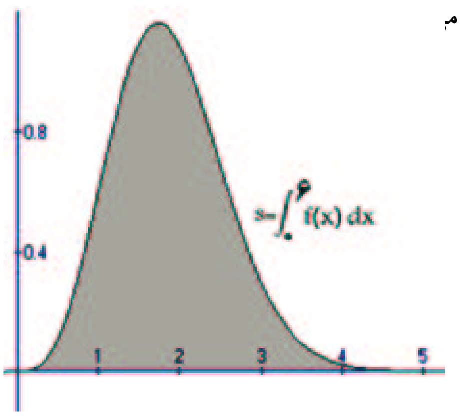
حل. طبق مثال ۳.۸ و مطالب قبل چنین می نویسیم:

$$I = \int_{۲}^{۳} \frac{۲x + ۱}{x^{۲} + x + ۱} dx = ln|x^{۲} + x + ۱|_{۲}^{۳} = ln ۱۳ - ln ۷ = ln \frac{۱۳}{۷}$$

تعبیر هندسی انتگرال معین $\int_a^b f(x)\ dx$ عبارتست از سطح محصور بین منحنی مثبت $f(x)$ و محور x–ها از $x = a$ تا $x = b$ یعنی

$$S = \int_a^b f(x)\ dx$$

شکل مقابل تابع منحنی $x^{۳}e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}$ را نشان م

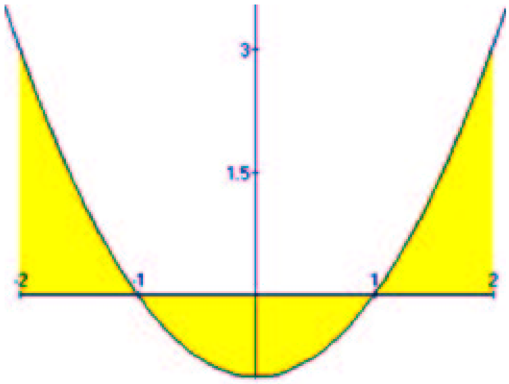


مثال ۱۴.۸ سطح محصور بین منحنی $y = x^{۲} - ۱$ و محور x—ها از $x = -۲$ تا $x = ۲$ را پیدا کنید.

حل. از آنجاکه محور طولها منحنی را به سه ناحیه تقسیم نموده، ما نیز سه مساحت مختلف را جداگانه محاسبه و حاصل را جمع می کنیم. بدین ترتیب:

$$S_۱ = \int_{-۲}^{-۱} x^۲ - ۱ = \frac{۴}{۳} \quad , \quad S_۲ = \int_{-۱}^{۱} x^۲ - ۱ = -\frac{۴}{۳} \quad , \quad S_۳ = \int_{۱}^{۲} x^۲ - ۱ = \frac{۴}{۳}$$

و مساحت مجموع برابر ۳ خواهد بود، زیرا مساحت همیشه مثبت است (شکل زیر).



مطلب ۳.۸ سطح محصور بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ عبارتست از

$$S = |\int_a^b f(x) - g(x)\ dx|$$

مثال ۱۵.۸ سطح محصور بین دو منحنی $y = \sqrt{x}$ و $y = x^۲$ را پیدا کنید.
حل. نقاط برخورد دو منحنی عبارتست از $\sqrt{x} = x^۲$ که $x = ۰$ و $x = ۱$ طبق فرمول سطح محصور بین دو منحنی

$$S = |\int_a^b (f-g)(x)\ dx| = |\int_۰^۱ (\sqrt{x} - x^۲)\ dx| = |[\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۳}x^۳]_۰^۱| = |\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳}| = \frac{۱}{۳}$$

تمرین ۷.۸ کلاسی. سطح محصور بین دو منحنی $y = ۴ - x^۲$ و $y = -۲x + ۴$ را پیدا کنید.

۱.۲.۸ خواص انتگرال معین

حداقل کاربرد انتگرال در محاسبهٔ سطح و حجم است که در فوق دربارهٔ سطح مطالبی ذکر کردیم. برای استفادهٔ بهتر از انتگرال معین از خواص آن که در ذیل بیان می شود بهره می گیریم:

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(x)dx &= 0 \\
\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\
\int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \\
\int_a^b kf(x)dx &= k\int_a^b f(x)dx \\
\int_a^b k\ dx &= k(b-a)
\end{aligned}$$

بعلاوه انتگرال عملگری (تابعی) صعودی است یعنی

$$f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

و برای تابعی متناوب بادوره تناوب T داریم

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

تعریف ۱.۸ مقدار میانگین (مقدارمتوسط) تابع پیوستهٔ f بر بازهٔ $[a,b]$ عبارتست از

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

مثال ۱۶.۸ مقدار متوسط تابع جریان $i(t) = 2sint$ را در بازهٔ $[0,\pi]$ بیابید.

حل. با استفاده از فرمول بالا

$$\overline{i} = \frac{1}{b-a}\int_a^b i(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2sintdt = \frac{1}{\pi}(-2cost)|_0^\pi = \frac{4}{\pi} \cong 1/273$$

تمرین ۸.۸ کلاسی. معادلهٔ حرکت متحرکی روی محور x—ها چنین است

$$x(t) = ۴t^۲ + ۵t$$

سرعت متوسط متحرک را در فاصلهٔ $[۳s, ۵s]$ پیدا کنید (نکته: $v = x'$).

مثال ۱۷.۸ ثابت کنید $\int_۰^\pi sin\sqrt{x}\ dx \leq \pi$

حل. از آنجاکه $sin\sqrt{x} \leq ۱$ با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[۰, \pi]$ داریم

$$\int_۰^\pi sin\sqrt{x}\ dx \leq \int_۰^\pi ۱\ dx = \pi$$

۲.۲.۸ مشتق انتگرال

اگر u و v توابع دلخواهی بر حسب x باشند، مشتق انتگرال بر حسب x چنین تعریف می شود:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = v'f(v) - u'f(u)$$

مثال ۱۸.۸ مشتق انتگرال $\int_{۲x-۱}^{x^۲}(۳t-۱)dt$ را بیابید.

$$\frac{d}{dx}\int_{۲x-۱}^{x^۲}(۳t-۱)dt = (x^۲)'(۳x^۲-۱)-(۲x-۱)'(۳(۲x-۱)-۱) = ٦x^۳-۱۴x+۸$$

۳.۲.۸ معادلات دیفرانسیل

از کاربردهای انتگرال حل معادلات دیفرانسیل است که در ذیل به آن می پردازیم.

تعریف ۲.۸ هر معادله که شامل حداقل یکی از مشتقات (اعم از مشتق اول، دوم، سوم،...) باشد را معادلهٔ دیفرانسیل نامیم، مثلاً $y' + ۲y = ۴x$ و $y - y'' + ۲x = ۴y'$ دو معادله دیفرانسیل محسوب می شوند. آنچه در این نوع معادلات مهم است یافتن تابعی مانند y است که در معادله صدق کند و این y را جواب معادله دیفرانسیل نامیم. می توانید ببینید که تابع $y = x^۲ + ۳$ جوابی برای معادله دیفرانسیل $y' = ۲x$ محسوب می شود.

مثال ۱۹.۸ حل معادلهٔ دیفرانسیل $y' = ۲x - ۳$.

حل. از آنجائیکه $y' = \frac{dy}{dx}$ با جایگذاری این مقدار در معادله دیفرانسیل داریم $\frac{dy}{dx} = ۲x - ۳$ و از آنجا $dy = (۲x - ۳)dx$ با انتگرالگیری از طرفین

$$\int dy = \int (۲x - ۳)dx \Longrightarrow y = x^۲ - ۳x + C$$

و تابع $y = x^۲ - ۳x + C$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود.

جوابی که از این مثال بدست آمده $y = x^۲ - ۳x + C$ دارای ثابت C است و به همین خاطر به آن **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل اطلاق می کنیم. بازای هر مقدار حقیقی بجای C یک جواب خاص بدست می آید که به آن **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل گوئیم. با جایگذاری **شرط اولیهٔ** معادله دیفرانسیل در جواب عمومی، یک جواب خصوصی حاصل می گردد.

مثال ۲۰.۸ حل معادلهٔ دیفرانسیل $e^x dx - ydy = ۰$ با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۲$.

$$e^x dx = ydy \Rightarrow \int e^x dx = \int ydy + C \Rightarrow e^x = \frac{y^۲}{۲} + C$$

که جواب عمومی است و با جایگذاری شرط اولیه در جواب عمومی جواب خصوصی بشکل زیر بدست می آید:

$$\Rightarrow e^۰ = ۲ + C \Rightarrow C = -۱ \Rightarrow e^x = \frac{y^۲}{۲} - ۱$$

مثال ۲۱.۸ حل معادلهٔ دیفرانسیل $۳x^۲dx + cosydy = ۰$ با شرط اولیهٔ $y(۱) = \pi$

$$۳x^۲dx = -cosydy \Rightarrow \int_۱^x ۳x^۲dx = \int_\pi^y -cosydy$$

$$\Rightarrow x^۳|_۱^x = -siny|_\pi^y \Rightarrow x^۳ - ۱ = -siny \Rightarrow x^۳ = -siny + ۱$$

مثال ۲۲.۸ حل معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y - y^۲$ با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۲$

$$\frac{dy}{y - y^۲} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y(۱ - y)} = \int dx + C \Rightarrow y(x) = \frac{ke^x}{۱ + ke^x}$$

$$y(۰) = ۲ \quad \Rightarrow k = -۲ \Rightarrow y(x) = \frac{-۲e^x}{۱ - ۲e^x}$$

مثال ۲۳.۸ حل معادلهٔ $۲yy' = e^x$

چون $y' = \frac{dy}{dx}$ یعنی $۲y\frac{dy}{dx} = e^x$ و $۲y\ dy = e^x\ dx$ پس $\int ۲y\ dy = \int e^x\ dx$ یا $y^۲ = e^x + C$ که جواب عمومی معادله دیفرانسیل خواهد بود.

تمرین ۹.۸ منزل.

۱) انتگرالهای زیر را حل کنید:

$$(a)\ \int (x^۳-۱)(x^۳+۱)^۴dx\ ,\quad (b)\ \int \frac{۳x^۳}{(x^۲-۵)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx\ ,\quad (c)\ \int \sqrt{\frac{۱-x}{x}}\frac{dx}{x^۲}$$

$$(d)\ \int \frac{۲x-۱}{x^۳-۵x^۲+۶x}dx\ ,\quad (e)\ \int \frac{x+۲}{x^۴-۲x^۲+۱}dx\ ,\quad (f)\ \int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$(g)\ \int \frac{۱}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-۱)}dx\ ,\quad (h)\ \int_۴^۵ \frac{dx}{x^۲-۴x+۳}\ ,\quad (i)\ \int x^۳e^{۲x}\,dx$$

$$(j)\ \int \frac{۲x-۱}{x^۴-۱}\,dx\ ,\quad (k)\ \int_۱^۲ (۲x^۳+x)\sqrt{۵x-۳}\,dx\ ,\quad (l)\ \int ln^۳x\ dx$$

$$(m)\ \int \frac{۱}{sinx\ cosx}\,dx\ ,\quad (n)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx\ ,\quad (o)\ \int \frac{e^{۳x}+۱}{e^x+۱}\,dx$$

$$(p)\ \int_۰^۱ \frac{x+۱}{(x-۱)^۲}\,dx\ ,\quad (q)\ \int \frac{\sqrt{۱+lnx}}{x}\,dx\ ,\quad (r)\ \int cos(ln\,x)dx$$

$$(s)\ \int_۰^\pi \frac{cos^۳x}{sinx}\,dx\ ,\quad (t)\ \int \frac{dx}{sinx}\ ,\quad (u)\ \int x^۳ln^۲x\,dx\ ,\quad (v)\ \int_۱^۲ ln\,x\,dx$$

$$(w)\ \int \frac{dx}{x\ ln^۲x}\ ,\quad (x)\ \int \frac{lnx\ dx}{x}\ ,\quad (y)\ \int \frac{dx}{۱+sin^۲x}\ ,\quad (z)\ \int_{e^۲}^e \frac{dx}{x\ lnx}$$

$$(ab)\ \int \frac{x^۲dx}{lnx}\ ,\quad (ac)\ \int \frac{dx}{a^۲sin^۲x+b^۲cos^۲x}\ (ab\neq ۰)\ ,\quad (ad)\ \int arctgx\,dx$$

$$(ae)\ \int \frac{e^{۲x}}{e^{۲x}+۱}\,dx\ ,\quad (af)\ \int \frac{۱}{\sqrt{(۱-x^۲)^۳}}\,dx\ ,\quad (ag)\ \int \frac{arcsinx}{\sqrt{۱+x}}\,dx$$

۲) ثابت کنید

$$\int \sqrt{x^۲+a^۲}dx = \frac{۱}{۲}x\sqrt{x^۲+a^۲}+\frac{۱}{۲}a^۲ln(x+\sqrt{x^۲+a^۲})+C \quad , \quad a \neq ۰$$

$$\int \sqrt{x^۲-a^۲}dx = \frac{۱}{۲}x\sqrt{x^۲-a^۲}-\frac{۱}{۲}a^۲ln(x+\sqrt{x^۲-a^۲})+C \quad , \quad a \neq ۰$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲ \pm a^۲}} = ln(x+\sqrt{x^۲ \pm a^۲})+C \quad , \quad a \neq ۰$$

۳) ثابت کنید هرگاه f در بازهٔ $[-a,a]$ پیوسته و زوج باشد آنگاه

$$\int_{-a}^{۰} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(x)dx = \frac{۱}{۲}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

۴) ثابت کنید هرگاه f در بازهٔ $[-a,a]$ پیوسته و فرد باشد آنگاه

$$\int_{-a}^{۰} f(x)dx = -\int_{۰}^{a} f(x)dx \quad , \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$$

۵) نشان دهید:

$$(a)\ \int_{۰}^{۱} \frac{sinx}{۱+x^۲}\,dx \leq ۱\ ,\ (b)\ \int_{۰}^{۱} \frac{sin^۲x+۱}{sinx} \geq ۲\ ,\ (c)\ \int_{۰}^{\pi} \frac{sinx}{x^۲+۱}dx \leq \pi$$

$$(d)\frac{۱}{٦} < \int_{۰}^{۲} \frac{dx}{x+۱۰} < \frac{۱}{۵}\ ,\ (e)\int_{۰}^{۲} \frac{۱}{x^۲+۴}dx \leq \frac{۱}{۲}\ ,\ (f)\int_{-۲}^{۲} x^۳cosnxdx = ۰$$

$$(g)\quad \int_{\frac{-۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} ln\frac{۱+x}{۱-x}sin^۲xdx = ۰ \quad , \quad (h)\quad \frac{۲}{\sqrt[۴]{e}}\int_{۰}^{۲} e^{x^۲-x}dx < ۲e^۲$$

٦) انتگرال های معین زیر را حل کنید.

$$(a)\ \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} ۳sin۲xcosx\,dx\ ,\ (b)\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin(cos(x))sin(x)\,dx\ ,\ (c)\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$(d)\ \int_{0}^{3}[x]+3x-1\ dx\ ,\ (e)\ \int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}\ dx\ ,\ (f)\ \int_{4}^{-3}|x+1|+[x]-x^{2}\ dx$$

$$(g)\ \int_{-2}^{2}(2|x-1|+3|x+1|-4)\ dx\quad ,\quad (h)\ \int_{-3}^{5}[x-1]-2[2x]+1\ dx$$

۷) با دوبار جزء بجزء نشان دهید

$$I=\int\ e^{ax}\ sinbx\ dx=\frac{asinbx-bcosbx}{a^{2}+b^{2}}e^{ax}+c$$

$$J=\int\ e^{ax}\ cosbx\ dx=\frac{acosbx+bsinbx}{a^{2}+b^{2}}e^{ax}+c$$

۸) ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{nx^{n-1}}{1+x}dx=\frac{1}{2}\quad ,\quad \int\frac{dx}{1+sinx}=-tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+C$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^{2}}e^{t^{2}}dt}{x^{6}}=\frac{1}{3}$$

۹) اگر f تابعی پیوسته بوده و $\int_{0}^{x^{2}}f(t)dt=x^{2}(1+x)$ مقدار $f(2)$ را بیابید.

۱۰) اگر

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}-1} & ,x\geq 2\ \text{اگر}\\ \sqrt{x}+1 & ,x<2\ \text{اگر}\end{cases}$$

مقدار $\int_{0}^{4}f(x)\ dx$ را حساب کنید.

۱۱) اگر معادلهٔ سرعت متحرکی بصورت $v(t)=3t^{3}-4t^{2}+5$ باشد سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی $[2s,4s]$ بیابید.

۱۲) اگر معادلهٔ شدت جریان در مداری بصورت $v(t)=4sin(100\pi t+\frac{\pi}{4})$ باشد، شدت جریان متوسط و شدت جریان موثر مدار را در بازهٔ زمانی $[0,2\pi]$ بیابید.

۱۳) ثابت کنید اگر m و n اعداد صحیحی باشند

$$\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} sinmx\ sinnx\ dx = \int_{\circ}^{\text{۲}\pi} cosmx\ cosnx\ dx = \{ {}^{\pi \ \ , \ \ (m=n)}_{\circ \ \ , \ \ (m\neq n)}$$

درصورتیکه

$$\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} sinmx\ cosnx\ dx = \circ$$

۱۴) سطح محصور بین دو منحنی $y = lnx$ و $y = ln^{\text{۲}}x$ را پیدا کنید.

۱۵) سطح محصور بین دو منحنی $y = \frac{lnx}{\text{۴}x}$ و $y = xlnx$ را پیدا کنید.

۱۶) مساحت واقع بین محور $x-$ها و منحنی های $y = arcsinx$ و $y = arccosx$ را بیابید.

۱۷) سطح محصور بین دو منحنی $y = \frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}$ و $y = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}x^{\text{۲}}$ را پیدا کنید.

۱۸) مساحت دو ناحیه‌ای را بیابید که از منحنی $y = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}x^{\text{۲}}$ و درون دایرهٔ $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}} = \text{۸}$ پدید می آیند.

۱۹) مساحت سه ناحیه‌ای را که از نمودار $x^{\text{۲}} - \text{۲}y^{\text{۲}} = \text{۱}$ و درون دایرهٔ $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}} = \text{۴}$ پدید می آیند، حساب کنید.

۲۰) مقدار متوسط تابع $y = cos^{\text{۲}}x$ را در فاصلهٔ $[\circ, \pi]$ چیست؟

۲۱) جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بدست بیاورید.

$$(a)\ \ y' = y^{\text{۲}}x+y^{\text{۲}} \ \ , \ \ (b)\ \ y' = -\text{۲}yx^{\text{۲}} \ \ , \ \ (c)\ \ (\text{۲}-x)dy+(\text{۵}+y)dx = \circ$$

$$(d)\ \ (x^{\text{۳}}+\text{۱})(y+\text{۱})dx = (x^{\text{۳}}+\text{۳}x)dy \ \ , \ \ (e)\ \ (x+\text{۲}e^{x})dy+y(\text{۱}+\text{۲}e^{x})dx = \circ$$

پروژه ۱.۸ (انتگرال ۱)
فرض کنید

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^۲ + a^۲)^n} \qquad , \qquad n = ۱, ۲, \cdots$$

فرمول بازگشتی

$$I_{n+۱} = \frac{۱}{۲na^۲} \frac{x}{(x^۲ + a^۲)^n} + \frac{۲n - ۱}{۲na^۲} I_n$$

را ثابت کرده و با شروع از $I_۱ = \frac{۱}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ مقادیر $I_۲, I_۳, \cdots$ را بیابید.

پروژه ۲.۸ (انتگرال ۲)
علاوه بر آنچه که در مطلب۱.۸ ذکر شد، از روش جزء به جزء نیز می توان انتگرالده های مثلثاتی را ساده و محاسبه نمود، با روش جزء به جزء ثابت کنید:

$$\begin{aligned}
\int sin^n x \, dx &= -\frac{sin^{n-۱} x cos x}{n} + \frac{n-۱}{n} \int sin^{n-۲} x \, dx \\
\int cos^n x \, dx &= \frac{cos^{n-۱} x sin x}{n} + \frac{n-۱}{n} \int cos^{n-۲} x \, dx \\
\int tg^n x \, dx &= \frac{tg^{n-۱} x}{n-۱} - \int tg^{n-۲} x \, dx \quad (n \neq ۱) \\
\int cotg^n x \, dx &= -\frac{cotg^{n-۱} x}{n-۱} - \int cotg^{n-۲} x \, dx \quad (n \neq ۱) \\
\int cos^m x \, sin^n x \, dx &= \frac{cos^{m-۱} x sin^{n+۱} x}{m+n} + \frac{m-۱}{m+n} \int cos^{m-۲} x \, sin^n x \, dx \\
\int cos^m x \, sin^n x \, dx &= -\frac{sin^{n-۱} x cos^{m+۱} x}{m+n} + \frac{n-۱}{m+n} \int cos^m x \, sin^{n-۲} x \, dx
\end{aligned}$$

فصل ۹

دنباله و سری

۱.۹ دنباله

منظور از دنباله، تعدادی از اعداد است که این تعداد می‌تواند محدود یا نامحدود باشد. مثل $۱, ۴, -۵, ۳, ۹$ که یک دنباله متناهی بوده و $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \cdots$ که دنباله‌ای نامتناهی است. دنباله متناهی را با نماد $\{a_n\}_{n=۱}^{k}$ و دنباله نامتناهی را با $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نمایش می دهند. برای مثال $\{c_n\} = ۲, ۴, ۶, ۸, \cdots$. هر عدد از دنباله را یک جملهٔ دنباله گوئیم. در این مثال عدد ۲ جملهٔ اول دنباله $c_۱$ و عدد ۸ جملهٔ چهارم $c_۴ = ۸$ دنباله است. اگر بتوانیم جملات یک دنباله را تحت قاعده و قانون خاصی بنویسیم، خواهیم توانست روی آن قوانین ریاضی را پیاده کنیم. در مثال قبل، همهٔ جملات از قانون $c_n = ۲n$ پیروی می کنند. مقدار $۲n$ را **جملهٔ عمومی** دنباله نامیم.

مثال ۱.۹ جمله عمومی دنباله ای بصورت $a_n = \frac{n-۱}{n+۲}$ است. پنج جملهٔ ابتدای این دنباله عبارتند از:

$$۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۴}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۶}, \cdots$$

تعریف ۱.۹ اگر جملهٔ عمومی دنباله ای دارای حد باشد، یعنی $\lim_{n\to\infty} a_n < \infty$ دنباله را **همگرا** گوئیم و در غیراینصورت $(lim_{n\to\infty} a_n = \infty)$ آنرا **واگرا** گوئیم. .

مشخص است که دنبالهٔ مثال ۱.۹، همگرا به ۱ است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-۱}{n+۲} = ۱$$

حال به بررسی چند دنبالهٔ خاص می پردازیم.

۱.۱.۹ دنبالهٔ ثابت

دنباله ای که از یک عدد تشکیل شده‌است. این دنباله همواره همگراست، مانند $۳, ۳, ۳, \cdots$ که همگرا به ۳ است.

۲.۱.۹ دنبالهٔ حسابی

به دنبالهٔ $a, a+d, a+۲d, a+۳d, \cdots$ دنبالهٔ حسابی گوئیم و مقدار d را **قدرنسبت** این دنباله نامیم. عناصر این دنباله به یک نسبت اضافه یا کم می شوند. دنبالهٔ $۵, ۸, ۱۱, \cdots$ یک دنبالهٔ حسابی با جمله ابتدائی $a = ۵$ و قدر نسبت $d = ۳$ می باشد. جملهٔ عمومی دنباله حسابی بصورت $a_n = a + (n-۱)d$ است. برای دنبالهٔ بالا جمله عمومی $a_n = ۵ + (n-۱)۳ = ۲ + ۳n$ می باشد. مجموع n جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی برابر است با

$$s_n = \frac{n(۲a + (n-۱)d)}{۲}$$

برای مثال بالا $s_n = \frac{n(۳n+۷)}{۲}$ و مجموع ۱۱ جملهٔ اول برابر با ۲۲۰ خواهد بود.

۳.۱.۹ دنباله هندسی

دنباله $a, aq, aq^۲, aq^۳, \cdots$ را دنبالهٔ هندسی و به مقدار q قدرنسبت گوئیم. دنبالهٔ $۳, ۶, ۱۲, ۲۴, \cdots$ یک دنباله هندسی با جمله ابتدائی $a = ۳$ و قدر نسبت $q = ۲$ می‌باشد.جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی بصورت $a_n = aq^{n-۱}$ بیان می شود. برای دنبالهٔ بالا جملهٔ عمومی $a_n = ۳ \times ۲^{n-۱}$ می باشد. مجموع n جمله اول از دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$s_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$$

در مثال بالا داریم $s_n = -۳(۱-۲^n)$ و مجموع ۵ جملهٔ اول برابر است با ۹۳.

۴.۱.۹ دنبالهٔ فیبوناتچی

به دنبالهٔ زیر که هر جملهٔ آن مجموع دو جملهٔ ما قبل است دنبالهٔ فیبوناتچی گوئیم.

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, \cdots$$

در این دنباله دو جملهٔ اول عبارتند از $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۱$ و این دنباله واگراست. جملهٔ عمومی این دنباله عبارتست از

$$a_n = \frac{\sqrt{۵}}{۵}[(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n - (\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n]$$

این نوع دنباله که هر جملهٔ آن بر حسب جمله یا جملات ماقبل آن مشخص می شود را **دنبالهٔ بازگشتی** گویند.

تمرین ۱.۹ منزل.

۱) همگرائی دنباله های زیر را تعیین کنید.

$$(a)\ \{\frac{۳n}{n+۱}\}_{n=۱}^{\infty} \quad , \quad (b)\ \{\frac{\sqrt[۳]{n^۲}sin\ n!}{n+۱}\}_۱^{\infty} \quad , \quad (c)\ \{\frac{۳^n}{۲^n+۱}\}_۱^{\infty}$$

$$(d)\ \{\frac{n}{۲n}\}_{n=۱}^{\infty} \quad , \quad (e)\ \{\sqrt[n]{n}\}_۱^{\infty} \quad , \quad (f)\ \{\frac{۱+sin\ n}{۲n}\}_۱^{\infty} \quad , \quad (g)\ \{sin^n x\}$$

۲) برای دنبالهٔ $۴, ۹, ۱۴, ۱۹, \cdots$ جملهٔ عمومی را محاسبه و جملهٔ دهم را بیابید. مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله چیست؟

۳) برای دنبالهٔ $۵, ۸, ۱۱, \cdots$ جملهٔ عمومی و جملهٔ هزارم را محاسبه و مجموع ۱۰۰ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

۴) در دنبالهٔ $۳, ٦, ۱۲, ۲۴, \cdots$ جملهٔ عمومی را محاسبه و جملهٔ صدم را بیابید. مجموع ۲۰ جملهٔ دوم این دنباله چیست؟

۵) ثابت کنید سه عدد a و b و c که تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می دهند، در رابطهٔ $b^۲ = ac$ صدق می کنند.

٦) مجموع n جمله از دنبالهٔ زیر را بیابید $۳, ۳۳, ۳۳۳, ۳۳۳۳, ۳۳۳۳۳, \cdots$

۷) مجموع سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی برابر ۱۳ و مجموع مجذورات این جملات ۹۱ است. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

۸) قدر نسبت یک دنبالهٔ هندسی نزولی را پیدا کنید که مجموع شش جمله اول آن برابر $\frac{۷}{۸}$ مجموع همهٔ جملات آن باشد.

۹) سه عدد بیابید که هم جملات متوالی یک دنبالهٔ عددی باشند و هم جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی.

۱۰) جملهٔ عمومی دنباله ای بازگشتی بصورت زیر داده شده است.

$$a_n = \frac{n}{n+۱}a_{n-۱} \quad , \quad a_۱ = ۱$$

پنج جملهٔ ابتدائی دنباله را تعیین نموده و همگرائی یا واگرائی دنباله را مشخص نمائید.

۲.۹ سری

سری عبارتست از مجموع جملات یک دنباله

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n + \cdots$$

مثلاً دنبالهٔ $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+۱}\}$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n+۱}$ را تشکیل می دهد. اگر مجموع جملات سری، برابر عددی حقیقی شود سری را همگرا گوئیم و در غیر اینصورت آنرا واگرا گوئیم. مجموع n جمله اول سری را مجموع جزئی n–ام سری گوئیم. یعنی

$$s_۱ = a_۱ \quad , \quad s_۲ = a_۱ + a_۲ \quad , \quad s_۳ = a_۱ + a_۲ + a_۳ \quad , \quad \cdots$$

با این نگرش یک سری، دنباله محسوب می شود و همگرائی سری، همگرائی دنباله مجموع های جزئی آن خواهد بود:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

سری ها دارای دو نوع همگرا و واگرا هستند و تعیین همگرائی سریها هدف کار ما خواهد بود. به مثال زیر توجه نمائید.

مثال ۲.۹ مطلوبست تعیین همگرائی سری زیر

$$\frac{۲}{۱.۳}+\frac{۲}{۳.۵}+\frac{۲}{۵.۷}+\cdots+\frac{۲}{(۲n-۱)(۲n+۱)}+\cdots$$

حل. با تجزیه جملهٔ n-ام بصورت

$$\frac{۲}{(۲n-۱)(۲n+۱)}=\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۲n+۱}$$

مجموعهای جزئی را بصورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}
s_۱ &= \frac{۱}{۱\times ۳}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۳}\\
s_۲ &= \frac{۱}{۱.۳}+\frac{۱}{۳.۵}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}=۱-\frac{۱}{۵}\\
s_۳ &= \frac{۱}{۱.۳}+\frac{۱}{۳.۵}+\frac{۱}{۵.۷}=۱-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}=۱-\frac{۱}{۷}\\
&\vdots\\
s_n &= ۱-\frac{۱}{۲n+۱}
\end{aligned}$$

با گرفتن حد دنباله مجموعهای جزئی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} ۱-\frac{۱}{۲n+۱}=۱$$

پس سری فوق همگراست.
به چند سری خاص می پردازیم.

۱.۲.۹ سری حسابی

با جمع جملات یک دنباله حسابی، سری حسابی به شکل زیر ایجاد می گردد:

$$a+(a+d)+(a+۲d)+(a+۳d)+\cdots$$

سری حسابی همیشه واگراست، زیرا

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(۲a+(n-۱)d)}{۲}=\infty$$

۲.۲.۹ سری هندسی

با تشکیل سری هندسی به شکل $a + aq + aq^۲ + aq^۳ + \cdots$ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(۱-q^n)}{۱-q} = \begin{cases} \frac{a}{۱-q} & if\ |q| < ۱, \\ \infty & if\ |q| \geq ۱. \end{cases}$$

یعنی این سری با شرط $|q| < ۱$ همگراست و مجموع سری برابر $\frac{a}{۱-q}$ خواهد بود. با شرط $|q| \geq ۱$ سری هندسی واگراست.

مثال ۳.۹ همگرائی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{۳^n}$$

حل. سری عبارتست از $\frac{۴}{۳^۱} + \frac{۴}{۳^۲} + \frac{۴}{۳^۳} + \cdots$ که جملهٔ اول $a = \frac{۴}{۳}$ و قدرنسبت $|q| = |\frac{۱}{۳}| < ۱$ است، پس سری همگرا بوده و مجموع آن

$$s_{\infty} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۳}} = ۲$$

خواهد بود.

۳.۲.۹ سری توافقی

سری به شکل

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{n} + \cdots$$

را **سری توافقی** گوئیم. آیا سری توافقی همگراست؟

مطلب ۱.۹ در سری Σa_n اگر $lim_{n\to\infty} a_n \neq ۰$ آنگاه سری واگراست.

مثال ۴.۹ همگرائی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ln(۱ + \frac{n}{n+۱})$$

حل. طبق مطلب۱.۹ سری همگراست زیرا

$$\lim_{n\to\infty} ln(۱ + \frac{n}{n+۱}) = ln۲ \neq ۰$$

۴.۲.۹ سری نمائی و لگاریتمی

سری نمائی را برای هر x حقیقی چنین تعریف می کنیم:

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

و سری لگاریتمی بصورت زیر تنها در حالات خاصی $-۱ < x \leq ۱$ قابل استفاده‌است:

$$ln(۱ + x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{x^n}{n}$$

تمرین ۲.۹ کلاسی. طبق سری های نمائی و لگاریتمی، همگرائی سری های زیر را تعیین کنید.

$$۱ + \frac{۳}{۱!} + \frac{۹}{۲!} + \frac{۲۷}{۳!} + \cdots$$

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \cdots$$

۳.۹ آزمون های همگرائی

علاوه بر آنچه در مطلب ۱.۹ و نیز در سری هندسی و برخی موارد دیگر برای همگرائی برخی از سری ها گفته شد، سری ها را می توان با آزمونهائی در مورد همگرائی بررسی نمود. از آزمونهای همگرائی برای سری ها به چند مورد مهم اشاره خواهیم داشت.

۱.۳.۹ آزمون نسبت

برای سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ اگر

$$\lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = r$$

سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $r < ۱$ و واگراست اگر $r > ۱$. برای $r = ۱$ آزمون جواب نمی دهد.

مثال ۵.۹ بررسی همگرائی سری

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۹}+\frac{۵}{۲۷}+\cdots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲n-۱}{۳^n}$$

حل. طبق آزمون نسبت سری همگراست:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+۱}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{۲n+۱}{۶n-۳}|=\frac{۱}{۳}$$

۲.۳.۹ آزمون ریشه

در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$$

سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگراست اگر $r<۱$ و واگراست اگر $r>۱$. برای $r=۱$ آزمون جواب نمی دهد.

مثال ۶.۹ بررسی همگرائی سری

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۳}+\frac{۱}{۴^۴}+\cdots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^n}$$

حل. طبق آزمون ریشه سری همگراست:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{۱}{n^n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰<۱$$

۳.۳.۹ آزمون انتگرال

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۱,+\infty)$ مثبت و نزولی باشد و $a_n=f(n)$ در اینصورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگراست اگر وتنها اگر انتگرال

$$\int_{۱}^{\infty}f(x)dx$$

همگرا باشد.

مثال ۷.۹ برای pی حقیقی همگرائی سری زیر را بررسی کنید.

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

حل. با فرض $f(x)=\frac{1}{x^p}$ تابع در شرایط آزمون انتگرال صدق می کند و می نویسیم:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=(\frac{x^{-p+1}}{-p+1})|_1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=\begin{cases}\infty & , \quad p<1\\ \frac{1}{p-1} & , \quad p>1\end{cases}$$

۴.۳.۹ سریهای دیگر

با استفاده از برخی سریهای موجود قادریم تا سری های مهمی را بدست آوریم. برای مثال می دانیم که سری هندسی بصورت زیر است:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

با انتگرال گیری از طرفین

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=-ln(1-x) \qquad |x|<1$$

و با تبدیل x به $-x$ سری دیگری بدست می آید که در قسمت نمائی ۴.۲.۹ گذشت.

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=ln(1+x) \qquad |x|<1$$

۵.۳.۹ بسط تیلور

بسط تیلور یک تابع مانند $f(x)$ حول a بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots$$

این بسط حول $a=0$ بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

مثال ۸.۹ بسط تابع $f(x)=e^x$ را حول نقطهٔ $a=0$ بیابید.
حل. با استفاده از فرمول دوم از بسط تیلور داریم

$$f(0)=1\ ,\ f(x)=e^x\ \ ,\ \ ,\ f'(x)=e^x\ ,\ f''(x)=e^x\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=e^x$$

پس $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$ و با جایگذاری داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

تمرین ۳.۹ کلاسی. بسط تیلور تابع $f(x)=cosx$ را حول نقطهٔ $a=0$ بیابید.

تمرین ۴.۹ کلاسی. اگر بسط تابع $sinx$ حول صفر بصورت زیر باشد

$$sin\ x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

(الف) انتگرال $\int_0^1 sinx^2\ dx$ را محاسبه کنید. (ب) بسط تابع $cosx$ را بیابید.

تمرین ۵.۹ منزل.

۱) سری های زیر را جمع بزنید.

$$(a)\ \ \frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots \qquad , \qquad (b)\ \ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots$$

$$(c)\ \ \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots \qquad , \qquad (d)\ \ \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots$$

۲) همگرائی سری های زیر را تعیین کنید.

$$(a)\ \ 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$(b)\ \ \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

$$(c)\ \ \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$$

$$(d)\quad sin\alpha + sin۲\alpha + \cdots + sinn\alpha + \cdots \quad (\alpha \neq k\pi)$$

$$(e)\ \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-\frac{۱}{n}} \ ,\ (f)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^n} \ ,\ (g)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \ ,\ (h)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{(n+۱)(n+۲)}$$

$$(i)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n+۱)(n+۲)} \ ,\ (j)\ \sum_{n=۱}^{\infty} ln\, n\, e^{-\sqrt{n}} \ ,\ (k)\ \sum_{n=۱}^{\infty} (logn)^{-logn}$$

$$(l)\ \sum_{n=۱}^{\infty} n^n\, e^{-n} \ ,\ (m)\ \sum_{n=۱}^{\infty} e^{-ln\ n} \ ,\ (n)\ \sum_{n=۱}^{\infty} (lnn)^{-n} \ ,\ (o)\ \sum_{n=۱}^{\infty} n!\, e^{-n}$$

$$(p)\ \sum_{n=۱}^{\infty} (lnn)^{-p} \ ,\ (q)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\ lnn} \ ,\ (r)\ \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^n e^{-n} \ ,\ (s)\ \sum_{n=۱}^{\infty} n!\, e^{-n^۲}$$

۳) همگرائی یا واگرائی دنبالهٔ بازگشتی زیر را مشخص کنید.

$$x_{n+۱} - \sqrt{c} = \frac{۱}{۲x_n}(x_n - \sqrt{c})^۲$$

۴) ثابت کنید مجموع سری متناهی

$$S = x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + \cdots + nx^n$$

برابر است با

$$S = \frac{x}{(x-۱)^۲}[nx^{n+۱} - (n+۱)x^n + ۱]$$

۵) با استفاده از بسط تیلور ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۰} \frac{sinx}{x} = ۱$$

$$(۱+x)^n \sim ۱ + nx$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \sim ۱ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۴}x^۴ + \cdots$$

پروژه ۱.۹ (دنباله و سری) در دنبالهٔ فیبوناتچی ۴.۱.۹ جملهٔ عمومی ذکر شده را بدست آورده و نیز ثابت کنید.

$$a_n < (\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲})^n$$

فصل ۱۰

ضمائم

- جدول مقادیر مثلثاتی

- توابع مثلثاتی

- فرمول های مشتق

- فرمول های انتگرال

زاویه (درجه)	زاویه (رادیان)	sin	cos	tg	$cotg$
۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	∞
۱	۰/۰۱۷	۰/۰۱۷	۱/۰۰۰	۰/۰۱۷	۵۷/۲۹
۲	۰/۰۳۵	۰/۰۳۵	۰/۹۹۹	۰/۰۳۵	۲۸/۶۳
۳	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۹۹۹	۰/۰۵۲	۱۹/۰۸
۴	۰/۰۷۰	۰/۰۷۰	۰/۹۹۸	۰/۰۷۰	۱۴/۳۰
۵	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۹۹۶	۰/۰۸۷	۱۱/۴۳
۶	۰/۱۰۵	۰/۱۰۵	۰/۹۹۵	۰/۱۰۵	۹/۵۱۴
۷	۰/۱۲۲	۰/۱۲۲	۰/۹۹۳	۰/۱۲۳	۸/۱۴۴
۸	۰/۱۴۰	۰/۱۳۹	۰/۹۹۰	۰/۱۴۱	۷/۱۱۵
۹	۰/۱۵۷	۰/۱۵۶	۰/۹۸۸	۰/۱۵۸	۶/۳۱۴
۱۰	۰/۱۷۵	۰/۱۷۴	۰/۹۸۵	۰/۱۷۶	۵/۶۷۱
۱۱	۰/۱۹۲	۰/۱۹۱	۰/۹۸۲	۰/۱۹۴	۵/۱۴۵
۱۲	۰/۲۰۹	۰/۲۰۸	۰/۹۷۸	۰/۲۱۳	۴/۷۰۵
۱۳	۰/۲۲۷	۰/۲۲۵	۰/۹۷۴	۰/۲۳۱	۴/۳۳۱
۱۴	۰/۲۴۴	۰/۲۴۲	۰/۹۷۰	۰/۲۴۹	۴/۰۱۱
۱۵	۰/۲۶۲	۰/۲۵۹	۰/۹۶۶	۰/۲۶۸	۳/۷۳۲
۱۶	۰/۲۷۹	۰/۲۷۶	۰/۹۶۱	۰/۲۸۷	۳/۴۸۷
۱۷	۰/۲۹۷	۰/۲۹۲	۰/۹۵۶	۰/۳۰۶	۳/۲۷۱
۱۸	۰/۳۱۴	۰/۳۰۹	۰/۹۵۱	۰/۳۲۵	۳/۰۷۸
۱۹	۰/۳۳۲	۰/۳۲۶	۰/۹۴۶	۰/۳۴۴	۲/۹۰۴
۲۰	۰/۳۴۹	۰/۳۴۲	۰/۹۴۰	۰/۳۶۴	۲/۷۴۷
۲۱	۰/۳۶۷	۰/۳۵۸	۰/۹۳۴	۰/۳۸۴	۲/۶۰۵
۲۲	۰/۳۸۴	۰/۳۷۵	۰/۹۲۷	۰/۴۰۴	۲/۴۷۵
۲۳	۰/۴۰۱	۰/۳۹۱	۰/۹۲۱	۰/۴۲۴	۲/۳۵۶
۲۴	۰/۴۱۹	۰/۴۰۷	۰/۹۱۴	۰/۴۴۵	۲/۲۴۶
۲۵	۰/۴۳۶	۰/۴۲۳	۰/۹۰۶	۰/۴۶۶	۲/۱۴۵
۲۶	۰/۴۵۴	۰/۴۳۸	۰/۸۹۹	۰/۴۸۸	۲/۰۵۰
۲۷	۰/۴۷۱	۰/۴۵۴	۰/۸۹۱	۰/۵۱۰	۱/۹۶۳
۲۸	۰/۴۸۹	۰/۴۶۹	۰/۸۸۳	۰/۵۳۲	۱/۸۸۱
۲۹	۰/۵۰۶	۰/۴۸۵	۰/۸۷۵	۰/۵۵۴	۱/۸۰۴
۳۰	۰/۵۲۴	۰/۵۰۰	۰/۸۶۶	۰/۵۷۷	۱/۷۳۲
۳۱	۰/۵۴۱	۰/۵۱۵	۰/۸۵۷	۰/۶۰۱	۱/۶۶۴
۳۲	۰/۵۵۹	۰/۵۳۰	۰/۸۴۸	۰/۶۲۵	۱/۶۰۰
۳۳	۰/۵۷۶	۰/۵۴۵	۰/۸۳۹	۰/۶۴۹	۱/۵۴۰
۳۴	۰/۵۹۳	۰/۵۵۹	۰/۸۲۹	۰/۶۷۵	۱/۴۸۳
۳۵	۰/۶۱۱	۰/۵۷۴	۰/۸۱۹	۰/۷۰۰	۱/۴۲۸
۳۶	۰/۶۲۸	۰/۵۸۸	۰/۸۰۹	۰/۷۲۷	۱/۳۷۶
۳۷	۰/۶۴۶	۰/۶۰۲	۰/۷۹۹	۰/۷۵۴	۱/۳۲۷
۳۸	۰/۶۶۳	۰/۶۱۶	۰/۷۸۸	۰/۷۸۱	۱/۲۸۰
۳۹	۰/۶۸۱	۰/۶۲۹	۰/۷۷۷	۰/۸۱۰	۱/۲۳۵
۴۰	۰/۶۹۸	۰/۶۴۳	۰/۷۶۶	۰/۸۳۹	۱/۱۹۲
۴۱	۰/۷۱۶	۰/۶۵۶	۰/۷۵۵	۰/۸۶۹	۱/۱۵۰
۴۲	۰/۷۳۳	۰/۶۶۹	۰/۷۴۳	۰/۹۰۰	۱/۱۱۱
۴۳	۰/۷۵۰	۰/۶۸۲	۰/۷۳۱	۰/۹۳۳	۱/۰۷۲
۴۴	۰/۷۶۸	۰/۶۹۵	۰/۷۱۹	۰/۹۶۶	۱/۰۳۶
۴۵	۰/۷۸۵	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

زاویه (درجه)	زاویه (رادیان)	sin	cos	tg	$cotg$
۴۵	۰/۷۸۵	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۴۶	۰/۸۰۳	۰/۷۱۹	۰/۶۹۵	۱/۰۳۶	۰/۹۶۶
۴۷	۰/۸۲۰	۰/۷۳۱	۰/۶۸۲	۱/۰۷۲	۰/۹۳۳
۴۸	۰/۸۳۸	۰/۷۴۳	۰/۶۶۹	۱/۱۱۱	۰/۹۰۰
۴۹	۰/۸۵۵	۰/۷۵۵	۰/۶۵۶	۱/۱۵۰	۰/۸۶۹
۵۰	۰/۸۷۳	۰/۷۶۶	۰/۶۴۳	۱/۱۹۲	۰/۸۳۹
۵۱	۰/۸۹۰	۰/۷۷۷	۰/۶۲۹	۱/۲۳۵	۰/۸۱۰
۵۲	۰/۹۰۸	۰/۷۸۸	۰/۶۱۶	۱/۲۸۰	۰/۷۸۱
۵۳	۰/۹۲۵	۰/۷۹۹	۰/۶۰۲	۱/۳۲۷	۰/۷۵۴
۵۴	۰/۹۴۲	۰/۸۰۹	۰/۵۸۸	۱/۳۷۶	۰/۷۲۷
۵۵	۰/۹۶۰	۰/۸۱۹	۰/۵۷۴	۱/۴۲۸	۰/۷۰۰
۵۶	۰/۹۷۷	۰/۸۲۹	۰/۵۵۹	۱/۴۸۳	۰/۶۷۵
۵۷	۰/۹۹۵	۰/۸۳۹	۰/۵۴۵	۱/۵۴۰	۰/۶۴۹
۵۸	۱/۰۱۲	۰/۸۴۸	۰/۵۳۰	۱/۶۰۰	۰/۶۲۵
۵۹	۱/۰۳۰	۰/۸۵۷	۰/۵۱۵	۱/۶۶۴	۰/۶۰۱
۶۰	۱/۰۴۷	۰/۸۶۶	۰/۵۰۰	۱/۷۳۲	۰/۵۷۷
۶۱	۱/۰۶۵	۰/۸۷۵	۰/۴۸۵	۱/۸۰۴	۰/۵۵۴
۶۲	۱/۰۸۲	۰/۸۸۳	۰/۴۶۹	۱/۸۸۱	۰/۵۳۲
۶۳	۱/۱۰۰	۰/۸۹۱	۰/۴۵۴	۱/۹۶۳	۰/۵۱۰
۶۴	۱/۱۱۷	۰/۸۹۹	۰/۴۳۸	۲/۰۵۰	۰/۴۸۸
۶۵	۱/۱۳۴	۰/۹۰۶	۰/۴۲۳	۲/۱۴۵	۰/۴۶۶
۶۶	۱/۱۵۲	۰/۹۱۴	۰/۴۰۷	۲/۲۴۶	۰/۴۴۵
۶۷	۱/۱۶۹	۰/۹۲۱	۰/۳۹۱	۲/۳۵۶	۰/۴۲۴
۶۸	۱/۱۸۷	۰/۹۲۷	۰/۳۷۵	۲/۴۷۵	۰/۴۰۴
۶۹	۱/۲۰۴	۰/۹۳۴	۰/۳۵۸	۲/۶۰۵	۰/۳۸۴
۷۰	۱/۲۲۲	۰/۹۴۰	۰/۳۴۲	۲/۷۴۷	۰/۳۶۴
۷۱	۱/۲۳۹	۰/۹۴۶	۰/۳۲۶	۲/۹۰۴	۰/۳۴۴
۷۲	۱/۲۵۷	۰/۹۵۱	۰/۳۰۹	۳/۰۷۸	۰/۳۲۵
۷۳	۱/۲۷۴	۰/۹۵۶	۰/۲۹۲	۳/۲۷۱	۰/۳۰۶
۷۴	۱/۲۹۲	۰/۹۶۱	۰/۲۷۶	۳/۴۸۷	۰/۲۸۷
۷۵	۱/۳۰۹	۰/۹۶۶	۰/۲۵۹	۳/۷۳۲	۰/۲۶۸
۷۶	۱/۳۲۶	۰/۹۷۰	۰/۲۴۲	۴/۰۱۱	۰/۲۴۹
۷۷	۱/۳۴۴	۰/۹۷۴	۰/۲۲۵	۴/۳۳۱	۰/۲۳۱
۷۸	۱/۳۶۱	۰/۹۷۸	۰/۲۰۸	۴/۷۰۵	۰/۲۱۳
۷۹	۱/۳۷۹	۰/۹۸۲	۰/۱۹۱	۵/۱۴۵	۰/۱۹۴
۸۰	۱/۳۹۶	۰/۹۸۵	۰/۱۷۴	۵/۶۷۱	۰/۱۷۶
۸۱	۱/۴۱۴	۰/۹۸۸	۰/۱۵۶	۶/۳۱۴	۰/۱۵۸
۸۲	۱/۴۳۱	۰/۹۹۰	۰/۱۳۹	۷/۱۱۵	۰/۱۴۱
۸۳	۱/۴۴۹	۰/۹۹۳	۰/۱۲۲	۸/۱۴۴	۰/۱۲۳
۸۴	۱/۴۶۶	۰/۹۹۵	۰/۱۰۵	۹/۵۱۴	۰/۱۰۵
۸۵	۱/۴۸۴	۰/۹۹۶	۰/۰۸۷	۱۱/۴۳	۰/۰۸۷
۸۶	۱/۵۰۱	۰/۹۹۸	۰/۰۷۰	۱۴/۳۰	۰/۰۷۰
۸۷	۱/۵۱۸	۰/۹۹۹	۰/۰۵۲	۱۹/۰۸	۰/۰۵۲
۸۸	۱/۵۳۶	۰/۹۹۹	۰/۰۳۵	۲۸/۶۳	۰/۰۳۵
۸۹	۱/۵۵۳	۱/۰۰۰	۰/۰۱۷	۵۷/۲۹	۰/۰۱۷
۹۰	۱/۵۷۱	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	∞	۰/۰۰۰

ضمیمهٔ مثلثاتی

در ذیل جداول و فرمول های مختلف مثلثاتی را که در صورت لزوم می بایست به آنها مراجعه شود، می آوریم. توجه نمائید که اکثر فرمول های مثلثات می بایست حفظ شوند.

زاویه	۰	۳۰	۴۵	٦۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳٦۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tg	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
$cotg$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

نسبت های مثلثاتی در ربع ها:

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم
$sin(۲\pi-\theta)=-sin\theta$	$sin(\pi+\theta)=-sin\theta$	$sin(\pi-\theta)=sin\theta$
$cos(۲\pi-\theta)=cos\theta$	$cos(\pi+\theta)=-cos\theta$	$cos(\pi-\theta)=-cos\theta$
$tg(۲\pi-\theta)=-tg\theta$	$tg(\pi+\theta)=tg\theta$	$tg(\pi-\theta)=-tg\theta$
$cotg(۲\pi-\theta)=-cotg\theta$	$cotg(\pi+\theta)=cotg\theta$	$cotg(\pi-\theta)=-cotg\theta$

روابط بین توابع مثلثاتی $sinx,\ cosx,\ tgx,\ cotgx$ که x و a و b و p و q متغیرهای دلخواه هستند، بصورت زیر است:

$$sin^۲x+cos^۲x = ۱ \qquad (۱)$$
$$tgx = \frac{sinx}{cosx} \qquad (۲)$$
$$cotgx = \frac{cosx}{sinx} \qquad (۳)$$
$$tgxcotgx = ۱ \qquad (۴)$$
$$tgx = \frac{۱}{cotgx} \qquad (۵)$$
$$cotgx = \frac{۱}{tgx} \qquad (٦)$$
$$۱+tg^۲x = \frac{۱}{cos^۲x} \qquad (۷)$$
$$۱+cotg^۲x = \frac{۱}{sin^۲x} \qquad (۸)$$
$$sinx = \pm\sqrt{۱-cos^۲x} \qquad (۹)$$

$$sinx = \pm\frac{tgx}{\sqrt{۱ + tg^{۲}x}} \tag{۱۰}$$

$$sinx = \pm\frac{۱}{\sqrt{۱ + cotg^{۲}x}} \tag{۱۱}$$

$$cosx = \pm\sqrt{۱ - sin^{۲}x} \tag{۱۲}$$

$$cosx = \pm\frac{۱}{\sqrt{۱ + tg^{۲}x}} \tag{۱۳}$$

$$cosx = \pm\frac{cotgx}{\sqrt{۱ + cotg^{۲}x}} \tag{۱۴}$$

$$sin(a+b) = sina\ cosb + cosa\ sinb \tag{۱۵}$$

$$sin(a-b) = sina\ cosb - cosa\ sinb \tag{۱۶}$$

$$cos(a+b) = cosa\ cosb - sina\ sinb \tag{۱۷}$$

$$cos(a-b) = cosa\ cosb + sina\ sinb \tag{۱۸}$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{۱ - tga\ tgb} \tag{۱۹}$$

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{۱ + tga\ tgb} \tag{۲۰}$$

$$cotg(a+b) = \frac{cotga\ cotgb - ۱}{cotga + cotgb} \tag{۲۱}$$

$$cotg(a-b) = \frac{cotga\ cotgb + ۱}{cotga - cotgb} \tag{۲۲}$$

$$sina\ cosb = \frac{۱}{۲}[sin(a+b) + sin(a-b)] \tag{۲۳}$$

$$sina\ sinb = \frac{-۱}{۲}[cos(a+b) - cos(a-b)] \tag{۲۴}$$

$$cosa\ cosb = \frac{۱}{۲}[cos(a+b) + cos(a-b)] \tag{۲۵}$$

$$cosp + cosq = ۲cos(\frac{p+q}{۲})cos(\frac{p-q}{۲}) \tag{۲۶}$$

$$cosp - cosq = -۲sin(\frac{p+q}{۲})sin(\frac{p-q}{۲}) \tag{۲۷}$$

$$sinp + sinq = ۲sin(\frac{p+q}{۲})cos(\frac{p-q}{۲}) \tag{۲۸}$$

$$sinp - sinq = ۲cos(\frac{p+q}{۲})sin(\frac{p-q}{۲}) \tag{۲۹}$$

$$tgp \pm tgq = \frac{sin(p \pm q)}{cosp\ cosq} \tag{۳۰}$$

$$cotgp \pm cotgq = \frac{sin(q \pm p)}{sinp\ sinq} \tag{۳۱}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \quad (32)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (33)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad (34)$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad (35)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (36)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (37)$$

$$tg^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \quad (38)$$

$$tg 2x = \frac{2 tg x}{1 - tg^2 x} \quad (39)$$

$$cotg 2x = \frac{cotg^2 x - 1}{2 cotg x} \quad (40)$$

$$\sin x = \frac{2 tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \quad (41)$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \quad (42)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (43)$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (44)$$

فرمول های مختلف مشتق را که در صورت لزوم می بایست به آنها مراجعه کنید، در ذیل می آوریم. در این فرمول ها u و v را تابعی دلخواه برحسب x فرض نمائید. a و r نیز اعدادی حقیقی هستند.

تابع $\Longrightarrow$ مشتق

$$a \Longrightarrow 0 \quad (۴۵)$$

$$x^r \Longrightarrow rx^{r-1} \quad (۴۶)$$

$$u^r \Longrightarrow ru'u^{r-1} \quad (۴۷)$$

$$\sqrt{x} \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (۴۸)$$

$$\sqrt[n]{x^m} \Longrightarrow \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \quad (۴۹)$$

$$\sqrt[n]{u^m} \Longrightarrow \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}} \quad (۵۰)$$

$$au+bv \Longrightarrow u'v+v'u \quad (۵۱)$$

$$uv \Longrightarrow u'v+v'u \quad (۵۲)$$

$$uvw \Longrightarrow u'vw+v'uw+w'uv \quad (۵۳)$$

$$\frac{u}{v} \Longrightarrow \frac{u'v-v'u}{v^2} \quad (۵۴)$$

$$ln\ u \Longrightarrow \frac{u'}{u} \quad (۵۵)$$

$$log_a^u \Longrightarrow \frac{u'}{u.lna} \quad (۵۶)$$

$$a^u \Longrightarrow u'a^u lna \quad (۵۷)$$

$$e^u \Longrightarrow u'e^u \quad (۵۸)$$

$$e^{au} \Longrightarrow au'e^{au} \quad (۵۹)$$

$$u^v \Longrightarrow u^v(v'lnu+\frac{vu'}{u}) \quad (۶۰)$$

$$sin\ u \Longrightarrow u'cos\ u \quad (۶۱)$$

$$cos\ u \Longrightarrow -u'sin\ u \quad (۶۲)$$

$$tg\ u \Longrightarrow u'(1+tg^2u)=u'sec^2u \quad (۶۳)$$

$$cotg\ u \Longrightarrow -u'(1+cotg^2u)=-u'csc^2u \quad (۶۴)$$

$$sec\ u \Longrightarrow u'secu.tgu \quad (۶۵)$$

$$csc\ u \Longrightarrow -u'cscu.cotgu \quad (۶۶)$$

$$arcsin\ u \implies \frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad (۶۷)$$

$$arccos\ u \implies \frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad (۶۸)$$

$$arctg\ u \implies \frac{u'}{۱+u^{۲}} \quad (۶۹)$$

$$arccotg\ u \implies \frac{-u'}{۱+u^{۲}} \quad (۷۰)$$

$$arcsec\ u \implies \frac{u'}{u\sqrt{u^{۲}-۱}} \quad (۷۱)$$

$$arccsc\ u \implies \frac{-u'}{u\sqrt{u^{۲}-۱}} \quad (۷۲)$$

$$sinh\ u \implies u'cosh\ u \quad (۷۳)$$

$$cosh\ u \implies u'sinh\ u \quad (۷۴)$$

$$tgh\ u \implies u'(۱+tgh^{۲}u) = u'sech^{۲}u \quad (۷۵)$$

$$cotgh\ u \implies -u'(۱+cotgh^{۲}u) = -u'csch^{۲}u \quad (۷۶)$$

$$sech\ u \implies -u'sechu.tghu \quad (۷۷)$$

$$csch\ u \implies -u'cschu.cotghu \quad (۷۸)$$

$$arcsinh\ u \implies \frac{u'}{\sqrt{۱+u^{۲}}} \quad (۷۹)$$

$$arccosh\ u \implies \frac{u'}{\sqrt{u^{۲}-۱}} \quad (۸۰)$$

$$arctgh\ u \implies \frac{u'}{۱-u^{۲}} \quad (۸۱)$$

$$arccotgh\ u \implies \frac{u'}{u^{۲}-۱} \quad (۸۲)$$

$$arcsech\ u \implies \frac{-u'}{u\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad (۸۳)$$

$$arccsch\ u \implies \frac{-u'}{|u|\sqrt{۱+u^{۲}}} \quad (۸۴)$$

ضمیمهٔ انتگرال

فرمول های مختلف انتگرال را که در صورت لزوم می توان به آنها مراجعه نمود، بشرح زیرند. در هر فرمول می توان ثابت C که ثابت انتگرالگیری است را افزود، علاوه بر این m و n اعدادی طبیعی و a و b و r اعدادی حقیقی اند.

$$\int du = u \tag{۸۵}$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{۸۶}$$

$$\int a\,dx = ax \tag{۸۷}$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} \qquad r \neq -۱ \tag{۸۸}$$

$$\int \frac{۱}{x}\,dx = ln\,|x| \qquad x \neq ۰ \tag{۸۹}$$

$$\int \frac{۱}{x-a}\,dx = ln|x-a| \qquad x \neq a \tag{۹۰}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} \qquad x \neq a \tag{۹۱}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} \qquad (a > ۰\ ,\ a \neq ۱) \tag{۹۲}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx = -\sqrt{a^۲-x^۲} \tag{۹۳}$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx = arcsin(\frac{x}{a}) \qquad (a > ۰) \tag{۹۴}$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲+x^۲}}\,dx = arcsinh(\frac{x}{a}) \qquad (a > ۰) \tag{۹۵}$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x^۲ \pm a^۲}}\,dx = ln|x+\sqrt{x^۲ \pm a^۲}| \tag{۹۶}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^۲ \pm a^۲}}\,dx = \sqrt{x^۲ \pm a^۲} \tag{۹۷}$$

$$\int \frac{۱}{a^۲+x^۲}\,dx = \frac{۱}{a}arctg(\frac{x}{a}) \qquad (a \neq ۰) \tag{۹۸}$$

$$\int \frac{۱}{a^۲-x^۲}\,dx = \frac{۱}{۲a}ln|\frac{a+x}{a-x}| \qquad (a \neq ۰) \tag{۹۹}$$

$$\int \frac{۱}{a^۲-x^۲}\,dx = \frac{۱}{a}arctgh\frac{x}{a} \qquad (a \neq ۰) \tag{۱۰۰}$$

$$\int \frac{۱}{x^۲ - a^۲}\,dx = \frac{۱}{۲a}ln|\frac{x-a}{x+a}| \quad (a \neq ۰) \qquad (۱۰۱)$$

$$\int \frac{۱}{x^۲ - a^۲}\,dx = \frac{-۱}{a}arccotgh\frac{x}{a} \quad (a \neq ۰) \qquad (۱۰۲)$$

$$\int \frac{۱}{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{۱}{b-a}ln|\frac{x+b}{x+a}| \quad (a \neq b) \qquad (۱۰۳)$$

$$\int sinax\,dx = -\frac{۱}{a}cosax \quad (a \neq ۰) \qquad (۱۰۴)$$

$$\int cosax\,dx = \frac{۱}{a}sinax \quad (a \neq ۰) \qquad (۱۰۵)$$

$$\int tgax\,dx = -\frac{۱}{a}ln|cosax| \qquad (۱۰۶)$$

$$\int cotgax\,dx = \frac{۱}{a}ln|sinax| \qquad (۱۰۷)$$

$$\int secx\,dx = ln|secx + tgx| \qquad (۱۰۸)$$

$$\int secx\,dx = ln|tg(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۴})| \qquad (۱۰۹)$$

$$\int cscx\,dx = ln|cscx - cotgx| \qquad (۱۱۰)$$

$$\int cscx\,dx = ln|tg\frac{x}{۲}| \qquad (۱۱۱)$$

$$\int sin^۲ax\,dx = \frac{۱}{۲a}(ax - sinax\,cosax) \qquad (۱۱۲)$$

$$\int cos^۲ax\,dx = \frac{۱}{۲a}(ax + sinax\,cosax) \qquad (۱۱۳)$$

$$\int sec^۲x\,dx = tg\,x \qquad (۱۱۴)$$

$$\int csc^۲x\,dx = -cotg\,x \qquad (۱۱۵)$$

$$\int \frac{۱}{sin^۲x}dx = -cotgx \qquad (۱۱۶)$$

$$\int \frac{۱}{cos^۲x}dx = tgx \qquad (۱۱۷)$$

$$\int sin^nx\,dx = -\frac{sin^{n-۱}xcosx}{n} + \frac{n-۱}{n}\int sin^{n-۲}x\,dx \qquad (۱۱۸)$$

$$\int cos^nx\,dx = \frac{cos^{n-۱}xsinx}{n} + \frac{n-۱}{n}\int cos^{n-۲}x\,dx \qquad (۱۱۹)$$

$$\int tg^{n}x\,dx = \frac{tg^{n-۱}x}{n-۱} - \int tg^{n-۲}x\,dx \quad (n \neq ۱) \qquad (۱۲۰)$$

$$\int cotg^{n}x\,dx = -\frac{cotg^{n-۱}x}{n-۱} - \int cotg^{n-۲}x\,dx \quad (n \neq ۱) \qquad (۱۲۱)$$

$$\int sec^{n}x\,dx = \frac{sec^{n-۲}x tgx}{n-۱} + \frac{n-۲}{n-۱}\int sec^{n-۲}x\,dx \quad (n \neq ۱) \qquad (۱۲۲)$$

$$\int csc^{n}x\,dx = -\frac{csc^{n-۲}x cotgx}{n-۱} + \frac{n-۲}{n-۱}\int csc^{n-۲}x\,dx \quad (n \neq ۱) \qquad (۱۲۳)$$

$$\int arcsin\frac{x}{a}\,dx = xarcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^{۲}-x^{۲}} \quad (a > ۰) \qquad (۱۲۴)$$

$$\int arccos\frac{x}{a}\,dx = xarccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^{۲}-x^{۲}} \quad (a > ۰) \qquad (۱۲۵)$$

$$\int arctg\frac{x}{a}\,dx = xarctg\frac{x}{a} - aln\sqrt{x^{۲}+a^{۲}} \quad (a > ۰) \qquad (۱۲۶)$$

$$\int arccotg\frac{x}{a}\,dx = xarccotg\frac{x}{a} + aln\sqrt{x^{۲}+a^{۲}} \qquad (۱۲۷)$$

$$\int arcsec\frac{x}{a}\,dx = xarcsec\frac{x}{a} - aln|x + \sqrt{x^{۲}-a^{۲}}| \qquad (۱۲۸)$$

$$\int arccsc\frac{x}{a}\,dx = xarccsc\frac{x}{a} + aln|x + \sqrt{x^{۲}-a^{۲}}| \qquad (۱۲۹)$$

$$\int sinhx\,dx = coshx \qquad (۱۳۰)$$

$$\int coshx\,dx = sinhx \qquad (۱۳۱)$$

$$\int tghx\,dx = ln|coshx| \qquad (۱۳۲)$$

$$\int cotghx\,dx = ln|sinhx| \qquad (۱۳۳)$$

$$\int sechx\,dx = arctg(sinhx) \qquad (۱۳۴)$$

$$\int cschx\,dx = ln|tgh\frac{x}{۲}| \qquad (۱۳۵)$$

$$\int cschx\,dx = -\frac{۱}{۲}ln\frac{coshx+۱}{coshx-۱} \qquad (۱۳۶)$$

$$\int sinh^{۲}x\,dx = \frac{۱}{۴}sinh۲x - \frac{۱}{۲}x \qquad (۱۳۷)$$

$$\int cosh^{۲}x\,dx = \frac{۱}{۴}sinh۲x + \frac{۱}{۲}x \qquad (۱۳۸)$$

$$\int sech^{۲}x\,dx = tghx \qquad (۱۳۹)$$

$$\int arcsinh\frac{x}{a}\,dx = xarcsinh\frac{x}{a} - \sqrt{x^۲ + a^۲} \quad a \geq ۰ \tag{۱۴۰}$$

$$\int \frac{۱}{sinh^۲ x}dx = -cotghx \tag{۱۴۱}$$

$$\int \frac{۱}{cosh^۲ x}dx = tghx \tag{۱۴۲}$$

$$\int sinmxsinnxdx = \frac{sin(m-n)x}{۲(m-n)} - \frac{sin(m+n)x}{۲(m+n)} \; (m^۲ \neq n^۲) \tag{۱۴۳}$$

$$\int cosmxcosnxdx = \frac{sin(m-n)x}{۲(m-n)} + \frac{sin(m+n)x}{۲(m+n)} \; (m^۲ \neq n^۲) \tag{۱۴۴}$$

$$\int sinmxcosnxdx = -\frac{cos(m-n)x}{۲(m-n)} - \frac{cos(m+n)x}{۲(m+n)} \; (m^۲ \neq n^۲) \tag{۱۴۵}$$

$$\int e^{ax}\, sinbx\, dx = \frac{asinbx - bcosbx}{a^۲ + b^۲}e^{ax} \tag{۱۴۶}$$

$$\int e^{ax}\, cosbx\, dx = \frac{acosbx + bsinbx}{a^۲ + b^۲}e^{ax} \tag{۱۴۷}$$

$$\int x^n sinax\, dx = -\frac{۱}{a}x^n cosx + \frac{n}{a}\int x^{n-۱}cosax\, dx \tag{۱۴۸}$$

$$\int x^n cosax\, dx = \frac{۱}{a}x^n sinx - \frac{n}{a}\int x^{n-۱}sinax\, dx \tag{۱۴۹}$$

$$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{۱}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-۱}e^{ax}\, dx \tag{۱۵۰}$$

$$\int lnx\, dx = xlnx - x \tag{۱۵۱}$$

$$\int (lnx)^n\, dx = x(lnx)^n - n\int (lnx)^{n-۱}\, dx \quad (n \neq -۱) \tag{۱۵۲}$$

$$\int x^n ln(ax)\, dx = \frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}[ln(ax) - \frac{۱}{n+۱}] \quad (n \neq -۱) \tag{۱۵۳}$$

$$\int x^n (lnax)^m\, dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}(lnax)^m - \frac{m}{n+۱}\int x^n (lnax)^{m-۱}\, dx \tag{۱۵۴}$$

$$\int \frac{۱}{a + bsinx}\, dx = \frac{۲}{\sqrt{a^۲ - b^۲}}arctg\frac{atg\frac{x}{۲} + b}{\sqrt{a^۲ - b^۲}} \quad a^۲ > b^۲ \tag{۱۵۵}$$

$$\int \frac{۱}{a + bcosx}\, dx = \frac{۲}{\sqrt{a^۲ - b^۲}}arctg\frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}tg\frac{x}{۲}}{a+b} \quad a^۲ > b^۲ \tag{۱۵۶}$$

فهرست الفبایی